Trois rectangles d'or font un icosaèdre

Voici de quoi travailler, calculer, réfléchir et rédiger. Notre réflexion part de cette représentation d'un icosaèdre inscrit dans un cube, due à Piero della Francesca (figure 1), maître de la perspective. Avant de voir cette figure, on pouvait concevoir l'icosaèdre comme constitué de deux pyramides régulières à base pentagonale dont les faces sont des triangles équilatéraux, accolées à un « antiprisme » de bases des pentagones réguliers et dont les faces sont aussi des triangles équilatéraux (figure 2). Cette façon de voir privilégie un axe de rotation, mais six axes jouent un rôle identique.

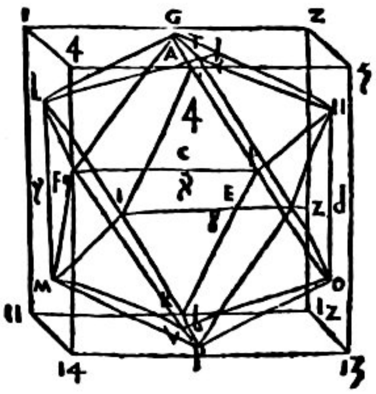

Figure 1 : le dessin de Piero della Francesca

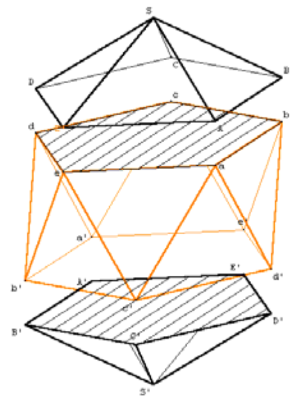

Figure 2 : un icosaèdre en trois morceaux

Le dessin de Piero della Francesca donne à penser que les douze sommets de l'icosaèdre seraient, quatre par quatre, les sommets de trois rectangles situés dans des plans deux à deux perpendiculaires. C'est ce point de vue que nous allons étayer.

1. Un rectangle d'or

La figure ci-contre illustre un problème classique : sur les côtés [AB] et [CD] du rectangle ABCD, de largeur 1 et de longueur φ, on place les points E et F de telle sorte que AEFD soit un carré. Montrer que les rectangles ABCD et BCFE ont « les mêmes proportions » lorsque φ est le « nombre d'Or », $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tout rectangle dont la longueur et la largeur sont dans un rapport φ est un « rectangle d'or ».

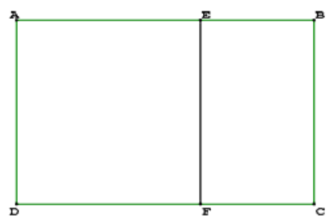

Figure 3 :un carré, « différence » entre deux rectangles d'or

2. Deux rectangles d’or

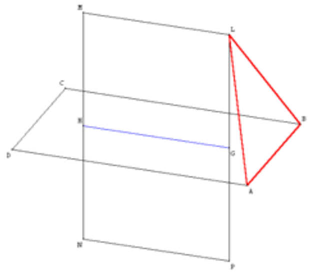

Figure 4 : deux rectangles d’or soutiennent un triangle équilatéral

Deux rectangles d’or, ABCD et LMNP, sont situés dans deux plans perpendiculaires, la droite (LP) étant orthogonale au plan contenant ABCD. La droite (GH), intersection des deux plans, est la médiatrice de [AB] et également de [LP], et le milieu de [GH] est le milieu de [AC].

Montrer que le triangle ABL est équilatéral.

3. Trois rectangles d’or

Dans la situation précédente, les deux rectangles d’or fournissent quatre triangles équilatéraux analogues à ABL. La figure ci-contre, dans laquelle les trois rectangles d’or ABCD, LMNP et QRST définissent trois plans deux à deux perpendiculaires, les segments [EF], [GH] et [JK] ayant même milieu, en recèle douze construits sur le même modèle. Les douze sommets des trois rectangles d’or définissent un solide à vingt faces identiques (étudier par exemple le cas de CSN).

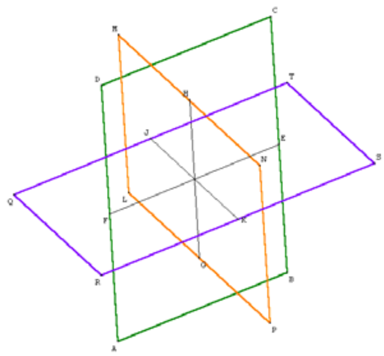

Figure 5 : les douze sommets d’un icosaèdre

4. Mais où sont passés les pentagones ?

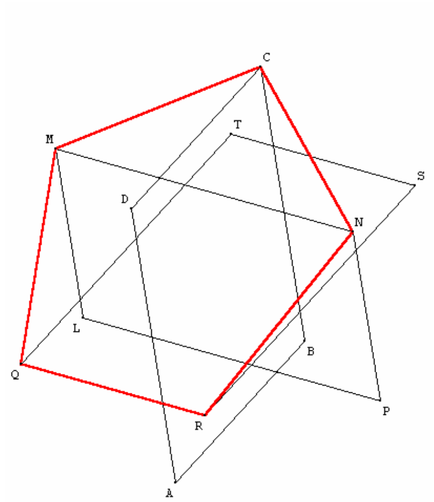

Figure 6 : un pentagone (plan ? régulier ?)

La figure ci-contre montre un pentagone, CNRQM, dont tous les côtés ont la même longueur. Il s’agit maintenant de montrer que les cinq sommets de ce pentagone sont situés dans un même plan et qu’ils appartiennent à un même cercle.

Observer le rôle particulier du point D, qui semble l’analogue du point S de la figure 1. Un autre point n’a pas encore été évoqué, qui joue un rôle éminent, le point O, point commun aux trois plans définis par les trois rectangles d’or.

Montrer que O et D sont respectivement équidistants de C, N, R, Q, M, qui appartiennent donc à l’intersection de deux sphères.

Quelle est la nature de l’intersection de l’icosaèdre avec le plan médiateur de [DB] ?

5. Sur les diagonales du pentagone

Observons la diagonale [MN] du pentagone CNRQM de la figure 6. En passant, nous avons trouvé que le rapport entre la diagonale du pentagone régulier (il n'y a qu'une sorte de diagonale, chacune d'elles partageant l'ensemble des trois sommets qu'elle ne contient pas en deux parties constituées de 1 ou 2…) et son côté est le nombre d'Or.

6. Comment « inscrire » un icosaèdre ?

Le dessin de Piero della Francesca représente un icosaèdre inscrit dans un cube : les douze sommets de l'icosaèdre appartiennent aux six faces du cube. Pour réaliser cette figure, on utilise trois rectangles d'or contenus dans trois plans parallèles chacun à deux faces du cube (et dont l'intersection est le centre du cube) dont les « largeurs » sont contenues dans les faces du cube (figure 7).

La figure 8 représente un icosaèdre inscrit dans un octaèdre : cette fois, les douze sommets de l'icosaèdre sont situés sur les douze arêtes de l'octaèdre.

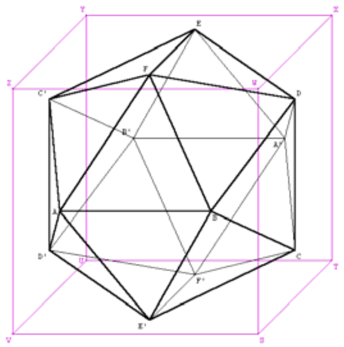

Figure 7 : géospace vs Piero

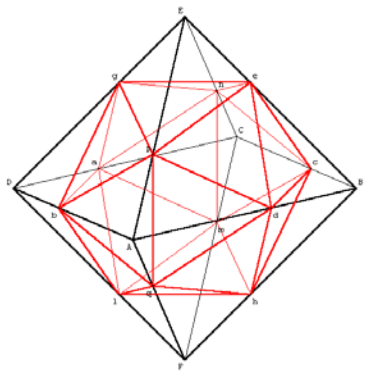

Figure 8 : un octaèdre bien rempli