

Cours –Nombre dérivé- Dérivées-1 STMG

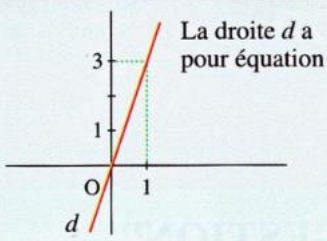
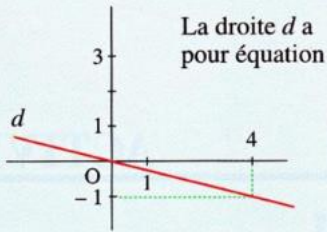
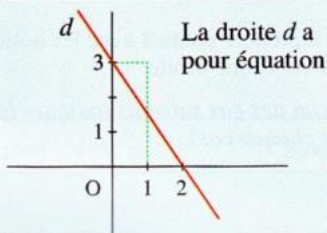
Extrait du programme : « La notion de nombre dérivé est introduite à l'aide du taux de variation. Le signe de la dérivée constituera ultérieurement l'outil efficace pour étudier les variations d'une fonction. Il convient donc de limiter les calculs de taux de variation à quelques exemples simples, comme celui de la fonction carré entre x_1 et x_2 , qui fournit l'occasion d'utiliser la factorisation de $x_1^2 - x_2^2$ »

I-Activité rapide (6 minutes)

Une ou deux questions ciblées.

L'activité rapide de début de séance permet la ré acquisition d'automatismes de calcul ou de raisonnement, ou bien permet de faire un état des lieux sur les savoirs et savoir-faire des élèves (ce que l'on appelle en didactique une évaluation diagnostique) ou encore d'activer un point de mathématiques qui saura être utilisé dans la séance. C'est ce dernier aspect que nous allons mettre en place dans cette présentation schématique de cours.

Question 1 : Choisir la bonne réponse (on justifiera) :

 La droite d a pour équation	$y = 3$
	$y = 3x$
	$y = \frac{1}{3}x$
 La droite d a pour équation	$y = 4x$
	$y = -4x$
	$y = -\frac{1}{4}x$
 La droite d a pour équation	$y = \frac{3}{2}x + 3$
	$y = -\frac{2}{3}x + 3$
	$y = -\frac{3}{2}x + 3$

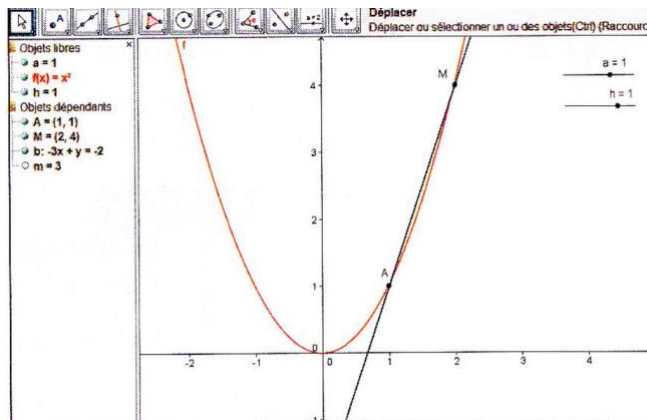
Question 2 : A(2 ; 4) et B(5 ; 8), quel est le coefficient directeur de la droite (AB) ?

II- Activité préparatoire à l'acquisition d'une nouvelle notion (12 minutes) :

Un exercice de recherche (d'abord individuellement puis à plusieurs) permet de comprendre l'intérêt et de donner du sens à celle-ci.

À l'aide du logiciel Geogebra, tracer la courbe de la fonction qui à x associe x^2 . Créer deux curseurs pour a et h de -3 à 3 avec un incrément de $0,1$ pour les deux. Créer le point A de coordonnées $(a, f(a))$ et le point $M(a+h, f(a+h))$ dans la barre de saisie.

Intégrer également $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ dans la barre de saisie.



Premier cas : $a=1$, on fait varier h :

Compléter le tableau :

[illegible]

Puis faire rapprocher M de A . La sécante (AM) a une position limite appelée tangente à la courbe. Quel est le coefficient de cette tangente. On l'appelle nombre dérivé de f en 1 et on le note $f'(1)$.

Deuxième cas : On manipule le curseur en faisant varier a .

Compléter le tableau :

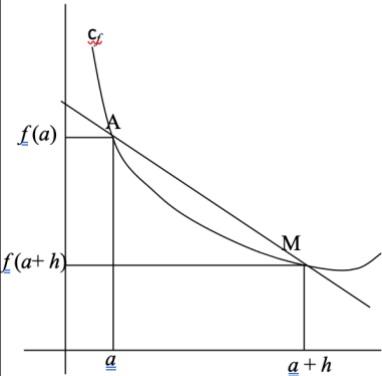
[illegible]

III- La trace écrite dans le cahier de cours (15 minutes) :

Elle doit être rédigée de façon rigoureuse et exemplaire pour servir de modèle à l'élève. Il est important que chaque élève écrive manuellement afin de mieux retenir le contenu. Cette écriture constitue un élément de mémorisation pour beaucoup d'élèves. Ne pas hésiter en parallèle à faire reformuler deux ou trois élèves sur une définition ou une propriété.

I - Dérivation en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.

Taux d'accroissement de f entre a et $a+h$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Nombre dérivé de f en a : Si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ a une limite finie quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et on note : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.	Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) où A et M sont les points de C_f d'abscisses a et $a+h$. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T à C_f au point d'abscisse a. T a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$	
--	---	--

Démonstration de la forme de l'équation réduite de la tangente :

D'après la définition de $f'(a)$, il vient que l'équation réduite a pour forme :

$y = f'(a)x + k$ où k est une constante que nous allons déterminer.

Pour ce faire, utiliser le fait que $A(a ; f(a))$ appartient à cette tangente.

Remplaçons les coordonnées de A dans l'équation :

$$f(a) = f'(a)a + k$$

D'où :

$$k = f(a) - f'(a)a$$

Ainsi l'équation réduite de la tangente en a à la courbe de f est :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

Ou encore :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

II - Fonctions dérivées

Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I , le nombre dérivé de f en x existe. Cette fonction est alors notée f' .

III – Dérivée des fonctions de référence

fonction f	fonction dérivée f'	ensemble de dérivabilité
k ($k \in \mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty [$

Démonstration pour la fonction f qui à x associe x^2 :

Pour tout réel a et pour h non nul, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h}$$

Pour h différent de 0, ce quotient est égal à $2a + h$ qui tend vers $2a$ quand h tend vers 0.

Ainsi, la dérivée de la fonction f est la fonction f' qui à x associe $2x$ (remarque : on a remplacé a par x).

IV- Deux exercices d'application directe (15 minutes) :

Ceux-ci, bien ciblés, permettent aux élèves de se rassurer sur leur compréhension et de figer certains bons réflexes.

Exercice 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Calculer le nombre dérivé de f en 3 en utilisant le taux d'accroissement.

Exercice 2 : Trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe de f (définie dans l'exercice 1) au point d'abscisse 2.

V- Synthèse co-construite avec les élèves (7 minutes)

Cette dernière phase de synthèse (orale et/ou écrite) est cruciale car elle permet de valoriser la parole de l'élève donc de le rassurer et l'aide à l'avenir à entrer dans la tâche mathématique. Elle rend l'assimilation plus aisée et le professeur entend ce qui a été retenu de sa séance. Il conviendra donc d'interroger quelques élèves en changeant au fil des jours.

Cette synthèse permettra de faire reformuler par les élèves pente d'une droite, tangente à une courbe, nombre dérivé, formules de quelques dérivées de référence. Elle permettra également de les faire s'exprimer sur certains calculs ou certaines notions qu'ils n'auraient pas compris.