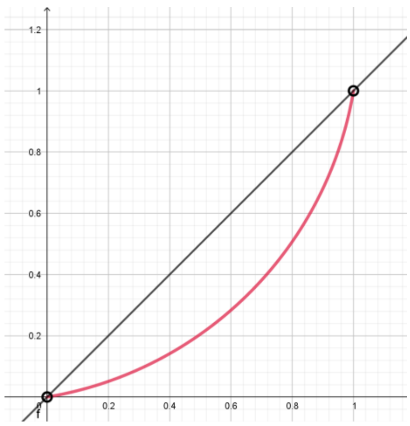
Concours général des lycées. Mathématiques. Terminales ES et L. Rédactions possibles.

PROBLÈME 1

1°- Les tirages sont indépendants, on utilise la probabilité produit. Les réponses aux questions (a) et (b) sont donc les mêmes : La probabilité d'obtenir Face – Face – Pile comme celle d'obtenir Face – Face – Face est $\frac{1}{8}$. On peut aussi considérer qu'il y a 8 éventualités, qui donnent 8 événements élémentaires équiprobables.
2°- Pour que les calculs suivants aient un sens, il faut précéder chaque phrase de quantificateurs universels. Les enchaînements d'égalités ne sont pas corrects mais font gagner de la place.
(a) Par mise en facteur : $p_k = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q) = pq^{k-1}$
(b) $S_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} + p_k = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{k-2} + pq^{k-1}$
$S_k = p\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-2} + q^{k-1}\right) = p\frac{1-q^k}{1-q}$, car $q \neq 1$. Et comme $p = 1 - q$, on a le résultat demandé.
(c) $E_3 = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1 - q + 2pq + 3pq^2 = 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 = 1 + q + q^2 - 3q^3$
(d) L'égalité proposée est vraie pour $k = 3$. Donnons-nous un entier k quelconque et supposons qu'elle est vraie pour ce k. De $E_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} - kq^k$, comme $E_{k+1} = E_k + (k+1)p_k$ on déduit $E_{k+1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} - kq^k + (k+1)pq^{k-1}$, et comme $p = 1 - q$, on trouve que l'égalité est vraie pour $k+1$. On conclut que cette propriété est vraie pour tout entier k supérieur ou égal à 3.
3°- (a) La suite $n \longmapsto q^n$ a pour limite 0, attendu que $q < 1$. La suite (S_n) a donc pour limite 0.
(b) On peut écrire pour tout k : $E_k = \frac{1-q^k}{1-q} - kq^k$. Sous cette forme, on voit apparaître la somme de deux suites, la première a pour limite $\frac{1}{1-q}$, autrement dit $\frac{1}{p}$, et la seconde a pour limite 0 , ce que nous avons admis. D'où le résultat.
4°- (a) Comme dans la première question, la probabilité de l'événement $(X_n = k)$ est le produit des probabilités tirer Face aux $k-1$ premiers tirages et Pile au $k$ème, c'est donc p_k.
(b) L'événement $(X_n = 0)$correspond à n tirages successifs de Face.
Sa probabilité est $(1-p)^n = q^n$
(c) La probabilité que Pile ne sorte pas en n lancers tend vers 0 quand le nombre de lancers tend vers l'infini.
5°- (a)L'espérance mathématique de X_n est la somme des produits $P(X_n = k)$ par k. C'est exactement le calcul proposé pour obtenir E_n.
(b)L'espérance de X_n tend vers $\frac{1}{p}$ lorsque n tend vers l'infini (si la probabilité d'obtenir Pile en un lancer est 1/2, l'espérance de la première apparition de Pile dans une série de lancers est 2, si elle est 1/50, l'espérance est 50, mais attention, il s'agit d'une limite, on suppose pouvoir jouer une infinité de coups pour parvenir à ce résultat, qui n'est qu'une espérance…)
6°- (a) Calculons $S_n - np(1 - S_n) = 1 - q^n - npq^n$ et comme $Q_n = \frac{E_n}{E} = p\left(\frac{1-q^n}{p} - nq^n\right)$ le résultat annoncé est correct.
(b) $1 - S_n = q^n$, donc $\ln(1 - S_n) = n\ln q$, d'où le résultat, et l'égalité suivante obtenue par substitution.
(c) La fonction $f$est définie par $f(x) = x - \frac{p}{\ln q}(1-x)\ln(1-x)$
7°- (a) La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ et on a, pour tout x, $f'(x) = 1 - \frac{p}{\ln q}(-\ln(1-x) - 1)$
Et la fonction dérivée est elle-même dérivable et $''(x) = \frac{-p}{\ln q(1-x)}$. Cette dernière quantité est positive (car $\ln q < 0$). La fonction f est donc convexe. $f(0) = 0$.



(b)Si x tend vers 1 par valeurs inférieures, $1 - x$ tend vers 0 par valeurs supérieures, on peut appliquer le résultat admis et on trouve que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$
(c) La fonction $f$étant convexe sur l'intervalle $]0, 1[$, sa représentation graphique est située en dessous de ses cordes, par conséquent en-dessous de celle qui joint les points de coordonnées (0, 0) et (1, 1). Il y a là un double abus de langage,

puisque la fonction f est définie sur l'intervalle ouvert. On peut procéder à un *prolongement par continuité,* la fonction prolongée $\hat{f}$ étant égale à la fonction f sur $]0, 1[$ et prenant en 0 la valeur 0 et en 1 la valeur 1.
8°- (a) Il suffit pour cela de calculer la dérivée de la fonction proposée. On note cette fonction F. Une primitive G de la fonction f est donc donnée par :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{p}{\ln q}\frac{(1-x)^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln(1-x)\right)$$

En dérivant, on obtient :

$$G'(x) = x - \frac{p}{\ln q}\left(-(1-x)\left(\frac{1}{2} - \ln(1-x)\right) + \frac{(1-x)^2}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$$

qui est le résultat annoncé.
(b) $\int_0^A f(x)\mathrm{d}x = G(A) - G(0) = \frac{A^2}{2} - \frac{p}{\ln q}\frac{(1-A)^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln(1-A)\right) - \frac{p}{4\ln q}$
(c) L'aire située entre la courbe et la première bissectrice est l'aire sous la courbe de la fonction représentative de la différence entre les fonctions $x \mapsto x$ et f. Cette différence est la fonction d définie sur $]0,1[$ par $d(x) = \frac{p}{\ln q}(1-x)\ln(1-x)$. Une primitive nous en est donnée, qui prend en 1 la valeur 0 et en 0 la valeur $-\frac{p}{4\ln q}$ (rappelons que ce nombre est positif).
D'où le résultat proposé pour l'indice de Gini.

PROBLÈME 2

1°- On résout l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Pour cela, on l'écrit : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$, ou encore $\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$, où on voit que les solutions sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est inférieure à 0, car $\sqrt{5}$ est supérieur strictement à 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est supérieur à 1 pour la même raison.
2°- (a) La fonction $x \longmapsto P_3(x)$ est dérivable et on a pour tout : $P'_3(x) = 3x^2 - 2x - 1$. La factorisation donne $P'_3(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$, ou encore $P'_3(x) = 3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Regardons les variations de la fonction P_3 :

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$P'_3(x)$	positif	0	Négatif	0	positif
$P_3(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

La fonction P_3 prend donc des valeurs négatives sur l'intervalle $]-\infty,\ 1]$. Comme sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, on en déduit qu'elle change de signe sur l'intervalle $[1, +\infty[$. L'équation proposée possède une solution réelle supérieure à 1.
(b)On commence par chercher un nombre supérieur à 1 dont l'image par P_3 est positive. On trouve que $P_3(2) = 1$. On peut procéder ensuite par dichotomie pour trouver un intervalle de longueur 10^{-3} dont les bornes aient des images de signes différents. L'algorithme ci-contre fournit la valeur 1,8388, centre (ou presque, à la précision demandée) du premier intervalle de longueur inférieure à 10^{-3} dont les bornes ont des images de signes contraires. Les calculs sont reconstitués sur le tableau ci-dessous, réalisé avec un tableur.

$a = 1, b = 2$
Tantque $b - a > 10^{-3}$
Si $P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$
$b \leftarrow \frac{a+b}{2}$
$a \leftarrow \frac{a+b}{2}$
Fin Tantque
Imprimer $x = \frac{a+b}{2}$

a	b	(a+b)/2	P((a+b)/2)
1	2	1,5	-1,375
1,5	2	1,75	-0,453125
1,75	2	1,875	0,201171875
1,75	1,875	1,8125	-0,143310547
1,8125	1,875	1,84375	0,024505615
1,8125	1,84375	1,828125	-0,060497284
1,828125	1,84375	1,8359375	-0,018270969
1,8359375	1,84375	1,83984375	0,00304836
1,8359375	1,83984375	1,837890625	-0,007628523
1,837890625	1,83984375	1,838867188	-0,002294389

3°- Étudions la fonction P_4 . Comme le coefficient du terme de plus haut degré, degré pair, est positif, on peut conclure que $\lim_{x\to-\infty} P_4 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_4 = +\infty$. D'autre part, $P_4(0) = -1$ et $P_4(1) = -3$. On peut conclure grâce au théorème des valeurs intermédiaires généralisé aux intervalles ouverts : il y a un zéro de P_4 inférieur à 0 et un autre supérieur à 1. Cela ne prouve pas que ce sont les seuls. Pour régler cette question, on peut étudier les variations de la fonction dérivée de P_4 , en étudiant la fonction dérivée de cette dérivée.
Cette étude conduit à voir que P_4 est décroissante sur un intervalle $]-\infty, \alpha]$, où $\alpha > 0$. Comme $P_4(0) = -1$, on en déduit qu'il y a une racine négative à P_4. P'_4 est croissant mais négatif à partir de $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{3}}$, mais comme il s'agit d'une fonction polynôme du troisième degré, il existe un réel β tel que P'_4 soit positif sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$. Sur cet int

4°- (a)On a, pour tout réel x différent de 1 : $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$

(b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout réel x :

$$Q_n(x) = x^n(1-x) + 1 - x^n = (1-x)P_n(x)$$

La nullité de $P_n(x)$ entraîne donc celle de $Q_n(x)$.

(c) La réciproque est fausse. La nullité de $Q_n(x)$ entraîne celle de $P_n(x)$ ou celle de $1-x$. Et comme $P_n(1) \neq 0$, ces deux éventualités ne se produisent pas simultanément.

5°- (a) La fonction dérivée de Q_n est définie par :

$Q'_n(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}\big((n+1)x - 2n\big)$

(b)Cette fonction dérivée prend la valeur 0 en $\frac{2n}{n+1}$.On dresse le tableau de variation :

x	0		$\frac{2n}{n+1}$		
$Q'_n(x)$		Négatif	0	Positif	
$Q_n(x)$	1	$\searrow$	$1-\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$	$\nearrow$	

En outre, $Q_n(1) = 0$ et $Q_n(2) = 1$

(c) Sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}, 2\right]$, la fonction Q_n change de signe, et est monotone croissante. Elle prend donc une fois la valeur 0.

(d) Comme dit plus haut, cette solution a_n est la seule solution positive ou nulle de l'équation $P_n(x) = 0$, car les solutions de $Q_n(x) = 0$ sont celles de $P_n(x) = 0$ et 1, or $a_n \neq 1$

6°- Le terme général de cette suite est $2 - \frac{2}{n+1}$. Sa limite est donc 2.

7°- a_n est compris entre $\frac{2n}{n+1}$ et 2, termes généraux de deux suites ayant même limite 2. C'est donc aussi la limite de (a_n).

8°- (a) On étudie la fonction Q_{2k} sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. Pour tout x, $Q_{2k}(x) = x^{2k+1} - 2x^{2k} + 1$. Cette fonction est dérivable et on a pour tout entier k et tout réel négatif x :

$Q'_{2k}(x) = x^{2k-1}\big((2k+1)x - 4k\big)$. La fonction est donc croissante (x est négatif, $2k-1$ est impair et $(2k+1)x - 4k$ est négatif).

(b) $Q_{2k}(-1) = -2$
(c) La fonction Q_{2k} est croissante sur $]-\infty, 0]$, prend en -1 la valeur -2 et en 0 la valeur 1, elle prend donc une seule fois la valeur 0 sur l'intervalle $]-1, 0]$. Et comme $Q_{2k}(x) = (1-x)P_{2k}(x)$, on en déduit qu'il y a une seule solution de $P_{2k}(x) = 0$ sur ce même intervalle.
(d) $P_{2k}(x) = 0$ possède donc deux solutions, une comprise entre 1 et 2, l'autre entre −1 et 0.
9°- (a) Calculons

$$Q_{2k+2}(x) - Q_{2k}(x) = x^{2k+3} - 2x^{2k+2} + 1 - x^{2k+1} + 2x^{2k} - 1 = (x-2)(x^2-1)x^{2k}$$

Les deux premiers facteurs de ce produit sont négatifs, et la puissance est paire. Le produit est positif.
(b) $Q_{2k}(b_k) = 0$, donc $Q_{2k+2}(b_k) \geq 0$. b_k est donc à droite de b_{k+1}.
$(c\ )$ La suite est donc décroissante.
10°-(a) ℓ est inférieur à tous les b_k. Donc, pour tout k, $Q_{2k}(\ell) \leq 0$.
(b) Les deux premiers termes définissant $Q_{2k}(x)$ tendent vers 0, comme termes de suites géométriques de raison en valeur absolue inférieure à 1. Donc $Q_{2k}(x)$ tend vers 1.
(c) On a admis l'existence de ℓ , limite de la suite (b_k). Si ℓ appartient à $]-1, 0]$, $Q_{2k}(\ell)$ tend vers 1 lorsque k tend vers l'infini. Or, $Q_{2k}(\ell) \leq 0$. Donc $\ell = -1$.
11°- Rappelons que ${b_k}^{2k+1} - 2{b_k}^{2k} + 1 = 0$. On peut par conséquent écrire ${b_k}^{2k} = \frac{1}{2-b_k}$.
Sous cette forme, le passage à la limite est légitime, le terme général de la suite $\left(b_k^{2k}\right)$ est l'inverse de celui de la suite $(2 - b_k)$, qui a pour limite 3. La limite cherchée est donc $\frac{1}{3}$.