Concours Général de mathématiques 2021 - Correction

Thomas Ravary

Problème 1 : Le début justifie la fin

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles telles que pour tout entier $n \geqslant 0, u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$
Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme de rang n de cette suite.

1) Démontrer que toute suite appartenant à $\mathcal{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.
Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{\exp(u_{n-1}(x))}{n} > 0$

2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$ alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
Correction : Supposons qu'il existe $N \geqslant 2$ tel que $u_N \leqslant 1$. On montre par récurrence que pour tout entier $n > N$, "$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$"

- $u_{N+1} = \frac{\exp(u_N)}{N+1}$ or $u_N \leqslant 1$ donc $\exp(u_N) \leqslant \mathrm{e}$ donc $u_{N+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{N+1}$
- Soit n un entier avec $n > N$. Supposons que $u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$
  $u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{3}$ car $n > N$ donc $n \geqslant N+1 \geqslant 3$
  or $e \leqslant 3$ donc $u_n \leqslant 1$ donc $u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$

Finalement pour tout $n > N$, $u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$
or $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive à partir du rang 1 donc d'après le théorème des gendarmes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

3) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$
Correction : Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0.
Soit n un entier avec $n \geqslant 1$, alors d'après 2), $u_{n+1} > 1$, donc $\frac{\exp(u_n)}{n+1} > 1$ et donc $u_n > \ln(n+1)$
donc par comparaison, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0 et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4) Démontrer que $0 \in E_0$
Correction : Par la calculatrice on obtient $u_4(0) \approx 0.91$ donc $u_4(0) \leqslant 1$ donc d'après 2), $u(0)$ converge vers 0.

5) a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Correction : Soit $x < y$ deux réels. On obtient par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, "$u_n(x) < u_n(y)$" (car exp est strictement croissante) :

- $u_0(x) = x$ et $u_0(y) = y$ donc $u_0(x) < u_0(y)$
- Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n(x) < u_n(y)$
  alors $\frac{\exp(u_n(x))}{n+1} < \frac{\exp(u_n(y))}{n+1}$ car exp est strictement croissante.
  Donc $u_{n+1}(x) < u_{n+1}(y)$.

Donc pour tout $n \geqslant 0$, et pour tous réels x et y, si $x < y$ alors $u_n(x) < u_n(y)$

b) En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x[$ est inclus dans E_0.
Correction : Soit $x \in E_0$ et $y \in]-\infty, x[$
$u(x)$ converge vers 0 et pour tout entier $n \geqslant 0$, $0 < u_n(y) < u_n(x)$ car $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante.
Donc par le théorème des gendarmes, $u(y)$ converge vers 0.
Donc $y \in E_0$.

6) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$
Correction : Soit $f : x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ définie sur $[2, +\infty[$.
f est dérivable et pour tout $x \in [2, +\infty[, f'(x) = \exp(x) - 2x - 1$
f' est dérivable et pour tout $x \in [2, +\infty[, f''(x) = \exp(x) - 2$
Pour tout $x \geqslant 2 \geqslant \ln(2), f''(x) \geqslant 0$ donc f' est croissante
Pour tout $x \geqslant 2, f'(x) \geqslant f'(2) \geqslant \mathrm{e}^2 - 5 \geqslant 0$ donc f est croissante.
Pour tout $x \geqslant 2, f(x) \geqslant f(2) \geqslant \mathrm{e}^2 - 6 > 0$

b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Correction : Supposons qu'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$.
On a $u_N \geqslant N+1 \geqslant 2$ donc $f(u_N) \geqslant 0$ donc $\exp(u_N) \geqslant u_N(u_N+1) \geqslant (N+1)(N+2)$
donc $\frac{\exp(u_N)}{N+1} \geqslant N+2$ donc $u_{N+1} \geqslant N+2$
Ainsi la propriété "$u_n \geqslant n+1$" est héréditaire à partir du rang 1.
donc s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors par récurrence, pour tout $n \geqslant N, u_n \geqslant n+1$
et donc par comparaison, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

c) Démontrer que $1 \in E_\infty$
Correction : $u_1(1) = e \geqslant 2$ donc par 6) b), $1 \in E_\infty$

7) Démontrer que, si x est un élément de E_∞ alors l'intervalle $[x, +\infty[$ est inclus dans E_∞
Correction : Soit $x \in E_\infty$ et $y > x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leqslant u_n(y)$ car $x \mapsto u_n(x)$ est croissante
or $u(x)$ diverge vers $+\infty$ donc $u(y)$ diverge vers $+\infty$ par comparaison.

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞

8) On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante. Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$ si $(a_n + b_n)/2 \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ sinon.

a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et ont même limite
Correction : On obtient par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, "$b_n - a_n = 1/2^n$" :

- $b_0 - a_0 = 1 - 0 = 1/2^0$
- soit $n \geqslant 0$, on suppose que $b_n - a_n = 1/2^n$.
  $b_n - a_n = 1/2^n > 0$ donc $a_n \leqslant (a_n + b_n)/2 \leqslant b_n$
  ou bien $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - (a_n + b_n)/2 = (b_n - a_n)/2 = 1/2^{n+1}$
  ou bien $b_{n+1} - a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 - a_n = (b_n - a_n)/2 = 1/2^{n+1}$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $b_n - a_n = 1/2^n > 0$ donc $a_n \leqslant (a_n + b_n)/2 \leqslant b_n$ donc $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par $b_0 = 1$ donc elle converge vers ℓ.
De même $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par $a_0 = 0$ donc elle converge vers ℓ'.
Enfin, $(b_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell' - \ell$
or pour tout $n \geqslant 0$, $b_n - a_n = 1/2^n$ donc $(b_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0
donc $\ell' - \ell = 0$ donc $\ell' = \ell$

b) Soit δ la limite commune des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.
Correction : Par construction, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \in E_0$ et $b_n \in E_\infty$.
Soit $x \in]-\infty, \delta[$. On pose $\epsilon = \delta - x$ alors $\epsilon > 0$ donc par définition de la limite, il existe $N \geqslant 0$ tel que $a_N \in]\delta - \epsilon, \delta + \epsilon[$.
or $\delta - \epsilon = \delta - (\delta - x) = x$ donc $x < a_N$, donc, par 5) b), $x \in E_0$.
De même, si $x \in]\delta, +\infty[$ alors il existe $N \geqslant 0$ tel que $b_n < x$ donc par 7), $x \in E_\infty$

9) On pose $c_2 = \ln(\ln(2))$, $c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4)))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(...\ln((\ell-1)\ln(\ell))...)))$.
Démontrer que, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0.
Correction : Pour tout entier $n \geqslant 2$ on pose φ_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi_n(x) = \ln(nx)$.
Soit $\ell \geqslant 2$ un entier. Alors $c_\ell = \ln \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ ... \circ \varphi_{\ell-1} \circ \varphi_\ell(1)$
Montrons par récurrence que pour tout entier $1 \leqslant n \leqslant \ell - 1$, "$u_n(c_\ell) = \varphi_{n+1} \circ \varphi_{n+2} \circ ... \circ \varphi_\ell(1)$"

- $u_1(c_\ell) = \exp(c_\ell) = \exp \circ \ln \circ \varphi_2 \circ .... \circ \varphi_\ell(1) = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ ... \circ \varphi_\ell(1)$
- soit $1 \leqslant n \leqslant \ell - 2$, supposons que "$u_n(c_\ell) = \varphi_{n+1} \circ \varphi_{n+2} \circ ... \circ \varphi_\ell(1)$"
  $u_{n+1}(c_\ell) = \frac{\exp(u_n(c_\ell))}{n+1} = \frac{\exp(\varphi_{n+1} \circ \varphi_{n+2} \circ ... \circ \varphi_l(1))}{n+1} = \frac{\exp(\ln((n+1)\varphi_{n+2} \circ ... \circ \varphi_l(1)))}{n+1} = \varphi_{n+2} \circ \varphi_{n+3} \circ ... \circ \varphi_\ell(1)$

Finalement, pour $n = \ell - 1$, on obtient $u_{\ell-1}(c_\ell) = \varphi_\ell(1) = \ln(\ell)$
donc $u_\ell(c_\ell) = \frac{\exp(u_{\ell-1}(c_\ell))}{\ell} = \frac{\exp(\ln(\ell))}{\ell} = 1$ et donc d'après 2), $c_\ell \in E_0$

10) Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ converge.
Correction : Soit $\ell \geqslant 2$ un entier.
$c_{\ell+1} = \ln \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_\ell \circ \varphi_{\ell+1}(1) = \ln \circ \varphi_2 \circ ... \varphi_\ell(\varphi_{l+1}(1))$ et $c_\ell = \ln \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_\ell(1)$
or $\ell \geqslant 2$ donc $\varphi_{\ell+1}(1) = \ln(\ell+1) \geqslant \ln(3) \geqslant \ln(\mathrm{e}) \geqslant 1$ donc $\varphi_{\ell+1}(1) \geqslant 1$
et $\ln \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_\ell$ est une composée de fonctions croissantes donc est croissante
donc $\ln \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_\ell(\varphi_{l+1}(1)) \geqslant \ln \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_\ell(1)$ donc $c_{\ell+1} \geqslant c_\ell$ donc $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ est croissante
De plus pour tout $\ell \geqslant 2$, $c_\ell \in E_0$ donc $c_\ell \leqslant \delta$
Donc $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ est croissante et majorée donc converge.

11) Démontrer que $\delta \in E_\infty$
Correction : Posons α la limite de $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$.
Soit $\ell \geqslant 2$. $c_\ell \leqslant \alpha$ car $(c_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ est croissante.

donc $u_{\ell-1}(c_\ell) \leqslant u_{\ell-1}(\alpha)$ car $x \mapsto u_{\ell-1}(x)$ est croissante d'après 5) a)
or $u_{\ell-1}(c_\ell) = \varphi_\ell(1) = \ln(\ell)$ donc $\ln(\ell) \leqslant u_{\ell-1}(\alpha)$
Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n(\alpha) \geqslant \ln(n+1)$ donc $u(\alpha)$ diverge vers $+\infty$ par comparaison
Donc $\alpha \in E_\infty$ et donc $\delta \leqslant \alpha$
Supposons alors que $\delta \neq \alpha$ c'est à dire $\delta < \alpha$ et posons $\epsilon = \alpha - \delta$
Alors $\epsilon > 0$ donc d'après la définition de la limite, il existe $L \geqslant 2$ tel que $c_L \in]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$
donc $c_L \in]\delta, \alpha + \epsilon[$ donc $c_L \in E_\infty$
C'est impossible puisque $c_L \in E_0$ et $E_0 \bigcap E_\infty = \emptyset$
Donc $\delta = \alpha$ et donc $\delta \in E_\infty$

Problème 2 : La loi du milieu

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées 0,1,2,...,$2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément
- si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b
- on recommence les opérations précédentes

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathbf{P}[D_n = k]$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I- Etude des petits cas

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.
Correction : Pour $n = 1$, il y a 3 boules numérotées 0, 1 et 2. A la première sélection, toutes les boules sont tirées et les boules de numéro 0 et 2 sont éliminées. Il reste donc toujours la boule numéro 1.
La loi de D_1 est donc donnée par

k	1
$\mathbf{P}[D_n = k]$	1

2) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.
Correction : Pour $n = 2$, il y a 5 boules numérotées de 0 à 4 et 2 tirages sont effectués.
Au premier tirage, il y a $\binom{5}{3} = 10$ sélections équiprobables de 3 boules. Au deuxième tirage, il reste 3 boules et donc plus de choix. La boule restante au bout des deux tirages est donc déterminé par la sélection des 3 boules du premier tirage. En explorant les 10 sélections de manière exhaustive on obtient que la boule restante a pour numéro :

- 1 uniquement si les boules 2, 3 et 4 sont sélectionnées au premier tirage
- 3 uniquement si les boules 0, 1 et 2 sont sélectionnées au premier tirage
- 2 dans tous les autres cas

On en déduit la loi de D_2 :

k	1	2	3
$\mathbf{P}[D_n = k]$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$

II - Valeurs extrêmes et symétrie

3) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 0]$.
Correction : Au bout des n tirages, toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Or la boule numéro 0 est éliminée dès qu'elle est tirée (son numéro est toujours le plus petit des numéros tirés). Donc la boule numéro 0 est toujours éliminée à l'issue des n tirages. Donc $\mathbf{P}[D_n = 0] = 0$.

4) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 1]$ en fonction de n.
Correction : Si la boule numéro 1 est tirée mais pas la boule numéro 0 lors du même tirage, alors 1 est le plus petit des numéros tirés et donc la boule numéro 1 est éliminée.
Ainsi, la boule restante au bout des n tirages est la boule numéro 1 si et seulement si les boules 0 et 1 font partie des 3 dernières boules et donc si et seulement si les boules 0 et 1 n'ont pas été tirées parmi les $n-1$ premiers tirages.
Ainsi $\mathbf{P}[D_n = 1] = \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \times \frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}} \times \frac{\binom{2n-5}{3}}{\binom{2n-3}{3}} \times \ldots \times \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{2n+1}{3}} = \frac{3!}{(2n+1)\times 2n \times (2n-1)} = \frac{3}{n(2n+1)(2n-1)}$

5) Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbf{P}[D_n = i] = \mathbf{P}[D_n = 2n - i]$?
Correction : Si on renumérote les boules dans l'ordre inverse de $2n$ à 0, cela ne change pas les boules éliminées. Pour $0 \leqslant i \leqslant 2n$, la boule numérotée i est alors renumérotée en $2n - i$. La probabilité que cette boule reste au bout des n tirages en utilisant la première notation est $\mathbf{P}[D_n = i]$, et elle est de $\mathbf{P}[D_n = 2n-i]$ avec la deuxième notation. Les deux notations ne changeant pas les boules éliminées (seulement leur numéro), ces deux probabilités sont égales. Donc $\mathbf{P}[D_n = i] = \mathbf{P}[D_n = 2n - i]$

6) Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.
Correction :

$$\begin{aligned}
E(D_n) &= \sum_{i=0}^{2n} i \times \mathbf{P}[D_n = i] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i \times \mathbf{P}[D_n = i] + n \times \mathbf{P}[D_n = n] + \sum_{i=n+1}^{2n} i \times \mathbf{P}[D_n = i] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i \times \mathbf{P}[D_n = i] + n\mathbf{P}[D_n = n] + \sum_{i=0}^{n-1} (2n-i)\mathbf{P}[D_n = 2n-i] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i \times \mathbf{P}[D_n = i] + n\mathbf{P}[D_n = n] + \sum_{i=0}^{n-1} (2n-i)\mathbf{P}[D_n = i] \\
&= n\mathbf{P}[D_n = n] + 2n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}[D_n = i] \\
&= n\mathbf{P}[D_n = n] + n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}[D_n = i] + \sum_{i=n+1}^{2n} \mathbf{P}[D_n = i] \right) \\
&= n \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{P}[D_n = i] \\
E(D_n) &= n
\end{aligned}$$

III - Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers $+\infty$. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

7) On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times ... \times \frac{2n-1}{2n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que $u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.
Correction : Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, "$u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$" :

- $u_0 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{3\times 0+1}} = 1$ donc $u_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\times 0+1}}$

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
  On a $u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ donc $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$
  or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} \\
&\iff \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \leqslant \frac{3n+1}{3n+4} \\
&\iff 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leqslant 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \\
&\iff 0 \leqslant n
\end{aligned}$$

  Donc, comme $0 \leqslant n$, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8) Déterminer pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$, la probabilité p_j que la boule numéro j soit éliminée lors de la première sélection
Correction : Notons A_j l'événement "la boule numéro j est selectionnée dans le premier tirage" et posons X^+ (resp. X^-) la variable aléatoire correspondant au plus grand numéro (resp. le plus petit numéro) parmi les 3 boules du premier tirage.

$p_j = \mathbf{P}[(X^+ = j) \cup (X^- = j)] = \mathbf{P}[A_j] \times \mathbf{P}_{A_j}[(X^+ = j) \cup (X^- = j)] = \mathbf{P}[A_j] \times \big(\mathbf{P}_{A_j}[X^+ = j] + \mathbf{P}_{A_j}[X^- = j]\big)$

or $\mathbf{P}_{A_j}[X^+ = j]$ est la probabilité que j soit le plus grand numéro au premier tirage sachant que la boule numéro j est tirée. Sachant que j est déjà tiré, il reste $2n$ numéros, donc $\binom{2n}{2}$ possibilités pour le premier tirage incluant la boule de numéro j. Il y a j numéros strictement inférieurs à j, donc $\binom{j}{2}$ possibilités de choisir deux boules de numéros strictement inférieurs à j. Finalement $\mathbf{P}_{A_j}[X^+ = j] = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{2n}{2}}$

De même, il y a $2n - j$ numéros strictement supérieurs à j donc $\mathbf{P}_{A_j}[X^- = j] = \frac{\binom{2n-j}{2}}{\binom{2n}{2}}$

donc $p_j = \frac{\binom{2n}{2}}{\binom{2n+1}{3}} \times \left(\frac{\binom{j}{2}}{\binom{2n}{2}} + \frac{\binom{2n-j}{2}}{\binom{2n}{2}} \right) = \frac{\binom{j}{2} + \binom{2n-j}{2}}{\binom{2n+1}{3}} = \frac{\frac{j\times(j-1)}{2} + \frac{(2n-j)(2n-j-1)}{2}}{\frac{(2n+1)\times 2n \times (2n-1)}{6}} = 3 \times \frac{j\times(j-1) + (2n-j)(2n-j-1)}{2n(2n+1)(2n-1)}$

donc $p_j = 3 \times \frac{2j^2 - 4nj + 2n(2n-1)}{2n(2n+1)(2n-1)} = 6 \times \frac{j^2 - 2nj + n(2n-1)}{2n(2n+1)(2n-1)}$

9) Démontrer que, si $n \geqslant 3$, alors $p_j \geqslant \frac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$.
Correction : Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$
$j^2 - 2nj + n(2n-1)$ est un polynôme du second degré en j qui atteint un minimum pour $j = -\frac{-2n}{2\times 1} = n$
donc $j^2 - 2nj + n(2n-1) \geqslant n^2 - 2n^2 + n(2n-1) \geqslant n^2 - n$
donc $p_j = 6 \times \frac{j^2-2nj+n(2n-1)}{2n(2n+1)(2n-1)} \geqslant 6 \times \frac{n^2-n}{2n(2n+1)(2n-1)} = \frac{6n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \times \frac{1}{2n}$
or $\frac{6n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \geqslant 1 \iff 6n^2 - 6n \geqslant 4n^2 - 1 \iff 2n^2 - 6n + 1 \geqslant 0$
$\Delta = 36 - 4 \times 2 = 28$ donc le polynôme $2x^2 - 6x + 1$ admet deux racines $x_1 = \frac{6-\sqrt{28}}{4} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$
de plus $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \frac{3+\sqrt{9}}{2} \leqslant 3$
Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $2n^2 - 6n + 1 \geqslant 0$
donc pour tout $n \geqslant 3$, $p_j \geqslant \frac{1}{2n}$

10) On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbf{P}[D_n = j]$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant 2n$. Démontrer que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Correction : Soit $n \geqslant 1$ un entier et j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose q_k la probabilité que la boule numéro j n'est pas éliminée à l'issue du k-ième tirage sachant que la boule numéro j est encore dans le sac avant d'effectuer le k-ième tirage. Ainsi, $\mathbf{P}[D_n = j] = q_1 \times q_2 \times ... \times q_n$
En particulier on a $q_1 = 1 - p_j \leqslant 1 - \frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n}$
Montrons alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $q_k \leqslant \frac{2n'-1}{2n'}$ pour un certain entier n' dépendant de k :
Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Supposons que la boule numéro j est encore dans le sac avant d'effectuer le k-ième tirage.
Il reste $2n+1-2(k-1) = 2n'+1$ boules dans le sac avec $n' = n-(k-1) = n+1-k \geqslant n+1-(n-2) = 3$.
On renumérote les boules de 0 à $2n'$ en conservant l'ordre des numéros et on note j' le nouveau numéro de la boule j.
D'après 9), comme $n' \geqslant 3$, la probabilité que la boule renumérotée j' soit éliminée au premier tirage est supérieur à $\frac{1}{2n'}$. Donc la probabilité que la boule renumérotée j' ne soit pas éliminée est inférieure ou égale à $1 - \frac{1}{2n'} = \frac{2n'-1}{2n'} = \frac{2(n+1-k)-1}{2(n+1-k)}$.
Or la renumérotation ne change pas l'ordre des numéros et donc ne change pas les boules éliminées donc la probabilité que la boule renumérotée j' ne soit pas éliminée est égale à la probabilité que la boule numérotée j ne soit pas éliminée, c'est à dire q_k.
Donc $q_k \leqslant \frac{2(n+1-k)-1}{2(n+1-k)}$
Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[D_n = j] &= q_1 \times q_2 \times ... \times q_n \\
&\leqslant q_1 \times q_2 \times ... \times q_{n-2} \qquad \text{car } q_{n-1} \times q_n \leqslant 1 \\
&\leqslant \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times ... \times \frac{5}{6} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times ... \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{8}{3} \\
&\leqslant \frac{8}{3} u_n \\
&\leqslant \frac{8}{3\sqrt{3n+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $M_n = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant 2n} (\mathbf{P}[D_n = j]) \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3n+1}}$
Donc par le théorème des gendarmes, M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

IV - Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux événements A et B, on note $A \backslash B$ l'événement selon lequel A est réalisé, mais pas B. En outre, si $\mathbf{P}[B] \neq 0$, on note $\mathbf{P}_B[A]$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$. Dans ce but, on va démontrer la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$

11) Démontrer que, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$
Correction : Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$
donc pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = n]$
et par symétrie pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbf{P}[D_n = 2n-k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = n]$
finalement pour tout pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant 2n$, $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = n]$
donc par définition de M_n, $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$

12) Démontrer $\mathcal{P}_1$
Correction : D'après 1), $\mathbf{P}[D_1 = 0] = 0$ et $\mathbf{P}[D_1 = 1] = 1$ donc $\mathbf{P}[D_1 = 0] \leqslant \mathbf{P}[D_1 = 1]$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie et d'un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

13) Pour tout entier ℓ compris entre 0 et $2n$, distinct de k et $k+1$, on note X_ℓ l'événement selon lequel les trois boules de numéros k, $k+1$ et ℓ sont choisies dès la première sélection.

a) Pourquoi, si $\ell > k+1$, a-t-on $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$?
Correction : Soit $\ell > k+1$.
Si X_ℓ est réalisé alors les boules numéros k et ℓ sont éliminées donc $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$
De plus, il reste après ce premier tirage $2(n-1)$ boules. En les renumérotant dans le même ordre avec les numéros de 0 à $2(n-1)$, la boule numéro $k+1$ est renumérotée en k puisqu'il y a exactement une boule éliminée parmi les précédentes.
Ainsi, $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$
b) Donner des résultats analogues sur $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k]$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1]$ lorsque $\ell < k$.
Correction : Soit $\ell < k$.
Si X_ℓ est réalisé alors les boules numéros ℓ et $k+1$ sont éliminées donc $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = 0$
De plus, en renumérotant les boules de 0 à $2(n-1)$, la boule numéro k est renumérotée en $k-1$ puisqu'il y a exactement une boule éliminée parmi les précédentes.
Donc $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]$

c) On note maintenant X l'événement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrer que $\mathbf{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_X[D_n = k+1]$.
Correction : Si $k = 0$ alors $\mathbf{P}_X[D_n = k] = 0 \leqslant \mathbf{P}_X[D_n = k+1]$
On suppose alors pour la suite que $1 \leqslant k \leqslant 2n$
Les événements X_0, X_1, ... ,X_{2n} forment une partition de l'événement X.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}_X[D_n = k] = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{2n} \mathbf{P}_X[(D_n = k) \cap X_\ell]$

Soit ℓ un entier avec $0 \leqslant \ell \leqslant 2n$.
Si $\ell = k$ ou $\ell = k+1$ alors par définition de X_ℓ, $\mathbf{P}[X_\ell] = 0$ et donc $\mathbf{P}_X[(D_n = k) \cap X_\ell] = 0$
Sinon X_ℓ correspond à fixer le premier tirage parmi les $\binom{2n+1}{3}$ sélections équiprobables possibles du premier tirage. Donc $\mathbf{P}[X_\ell] = \frac{1}{\binom{2n+1}{3}}$
et dans ce cas $\mathbf{P}_X[(D_n = k) \cap X_\ell] = \frac{\mathbf{P}[(D_n=k)\cap X_\ell \cap X]}{\mathbf{P}[X]} = \frac{\mathbf{P}[(D_n=k)\cap X_\ell]}{\mathbf{P}[X]} = \frac{\mathbf{P}[X_\ell]\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n=k]}{\mathbf{P}[X]} = \frac{\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n=k]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]}$
De plus

- ou bien $\ell > k+1$ alors par 13)a), $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$
  Donc $\mathbf{P}_X[(D_n = k) \cap X_\ell] = \frac{\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n=k]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]} = 0$
- ou bien $\ell < k$ alors par 13)b), $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]$
  Donc $\mathbf{P}_X[(D_n = k) \cap X_\ell] = \frac{\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n=k]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]} = \frac{\mathbf{P}[D_{n-1}=k-1]}{\binom{2n}{3}\mathbf{P}[X]}$

Donc $\mathbf{P}_X[D_n = k] = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]} = k \times \frac{\mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]}$
De même, $\mathbf{P}_X[D_n = k+1] = \displaystyle\sum_{\ell=k+2}^{2n} \frac{\mathbf{P}[D_{n-1} = k]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]} = (2n-(k+1)) \times \frac{\mathbf{P}[D_{n-1} = k]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]}$
Enfin, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, donc $2n-(k+1) \geqslant 2n-(n-1+1) \geqslant n \geqslant k$
Et $0 \leqslant k-1 \leqslant n-2$ donc par $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}[D_{n-1} = k-1] \leqslant \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$
donc $k \times \frac{\mathbf{P}[D_{n-1}=k-1]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]} \leqslant (2n-(k+1)) \times \frac{\mathbf{P}[D_{n-1}=k]}{\binom{2n+1}{3}\mathbf{P}[X]}$
Donc $\mathbf{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_X[D_n = k+1]$

14) Soit Y l'événement selon lequel l'une des boules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.
a) Démontrer que $\mathbf{P}_{Y\setminus X}[D_n = k] = \mathbf{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1]$.
Correction : Considérons une issue de $Y\setminus X$. Au premier tirage, une seule des deux boules numérotées k et $k+1$ est tirée puis éliminée. Comme l'une des deux est éliminée, aucun des autres tirages ne comprend les 2 boules ensemble. Finalement aucun des tirages de cette issue ne contient les 2 boules numérotées k et $k+1$ ensemble.
Ainsi, en échangeant les numéros k et $k+1$ dans cette issue, on ne change pas l'ordre des numéros dans chaque tirage, on obtient donc une nouvelle issue de $Y\setminus X$.
Il y a donc autant d'issues de $Y\setminus X$ se terminant avec la boule de numéro k que d'issues de $Y\setminus X$ se terminant avec la boule de numéro $k+1$, et ces issues sont équiprobables.
Donc $\mathbf{P}_{Y\setminus X}[D_n = k] = \mathbf{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1]$

b) En déduire que $\mathbf{P}_Y[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_Y[D_n = k+1]$
Correction : On a $X \subset Y$, et donc $Y = (Y\setminus X) \cap X$
Donc $\mathbf{P}_Y[D_n = k] = \mathbf{P}_{Y\setminus X}[D_n = k] + \mathbf{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_{Y\setminus X}[D_n = k+1] + \mathbf{P}_X[D_n = k+1] = \mathbf{P}_Y[D_n = k+1]$

15) Soit a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.
a) Soit G l'événement selon lequel $c < k$. Démontrer que $\mathbf{P}_G[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_G[D_n = k+1]$.
Correction : si G est réalisé alors $k \geqslant 3$ et 2 boules sont éliminées parmi celles qui précèdent les boules numéros k et $k+1$. En renumérotant les boules dans l'ordre de 0 à $2(n-1)$ on obtient $\mathbf{P}_G[D_n = k] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k-2]$ et $\mathbf{P}_G[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]$.
Or $0 \leqslant k-2 \leqslant n-2$ donc, d'après $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}[D_{n-1} = k-2] \leqslant \mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]$
donc $\mathbf{P}_G[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_G[D_n = k+1]$

b) Soit H l'événement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$. Démontrer que $\mathbf{P}_H[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_H[D_n = k+1]$.
Correction : Si H est réalisé , alors $k \leqslant 1$ et une seule boule est éliminée parmi celles qui précèdent les boules numérotées k et $k+1$.
En renumérotant les boules on obtient $\mathbf{P}_H[D_n = k] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k-1]$ et $\mathbf{P}_H[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$
Or $0 \leqslant k-1 \leqslant n-2$ donc, d'après $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}[D_{n-1} = k-1] \leqslant \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$
Donc $\mathbf{P}_H[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_H[D_n = k+1]$

c) Soit I l'événement selon lequel $k+1 < a$. Démontrer que si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}_I[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_I[D_n = k+1]$.
Correction : Si I est réalisé alors aucune boule n'est éliminée parmi celles qui précèdent les boules numérotées k et $k+1$. Donc en renumérotant les boules dans l'ordre de 0 à $2(n-1)$, les boules numérotées k et $k+1$ gardent leur numéro donc $\mathbf{P}_I[D_n = k] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$ et $\mathbf{P}_I[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k+1]$
Or si de plus $k \leqslant n-2$ alors $0 \leqslant k \leqslant n-2$, donc d'après $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}[D_{n-1} = k] \leqslant \mathbf{P}[D_{n-1} = k+1]$
donc $\mathbf{P}_I[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_I[D_n = k+1]$

16) Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$.
Correction : Les événements Y, G, H et I forment une partition de l'univers. En effet, si $a < b < c$ sont les numéros des boules tirées à la première sélection, alors :

- ou bien l'une des boules numérotées k ou $k+1$ est éliminée (les deux ne peuvent pas être éliminées en même temps puisque k et $k+1$ sont consécutifs mais pas a et c). Ce qui correspond à l'événement Y
- ou bien aucune de ces boules n'est éliminée. Donc ni a ni c ne vaut k ou $k+1$. Et comme k et $k+1$ sont consécutifs, a et c se répartissent soit
  - avant k et $k+1$, c'est l'événement G
  - de part et d'autre de k et $k+1$, c'est l'événement H
  - après k et $k+1$, c'est l'événement I

Ainsi, $\mathbf{P}[D_n = k] = \mathbf{P}[Y].\mathbf{P}_Y[D_n = k] + \mathbf{P}[G].\mathbf{P}_G[D_n = k] + \mathbf{P}[H].\mathbf{P}_H[D_n = k] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}_I[D_n = k]$
et $\mathbf{P}[D_n = k+1] = \mathbf{P}[Y].\mathbf{P}_Y[D_n = k+1] + \mathbf{P}[G].\mathbf{P}_G[D_n = k+1] + \mathbf{P}[H].\mathbf{P}_H[D_n = k+1] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}_I[D_n = k+1]$
Finalement, si $k \leqslant n-2$, alors les inégalités trouvées dans les questions précédentes donnent bien :
$\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$

17) Démontrer $\mathcal{P}_n$.
Correction : On a montré en 16) que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-2$, on a $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$
Il reste donc à démontrer $\mathbf{P}[D_n = n-1] \leqslant \mathbf{P}[D_n = n]$ pour démontrer $\mathcal{P}_n$.
Les inégalités terme à terme utilisées en 16) sont toujours valides, sauf pour l'événement I, le seul où la contrainte $k \neq n-1$ est nécessaire. Concentrons-nous sur I :
D'après 15) on a :
$\mathbf{P}_I[D_n = n-1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = n-1]$ et $\mathbf{P}_I[D_n = n] = \mathbf{P}[D_{n-1} = n] = \mathbf{P}[D_{n-1} = n-2]$ par symétrie (cf 5)).
On remarque que dans ce cas $\mathbf{P}[D_{n-1} = n-2] \leqslant \mathbf{P}[D_{n-1} = n-1]$ et donc $\mathbf{P}_I[D_n = n-1] \geqslant \mathbf{P}_I[D_n = n]$
On ne peut donc pas utiliser les inégalités terme à terme comme en 16).
On va démontrer alors que

$$\mathbf{P}[H].\mathbf{P}_H[D_n = n-1] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}_I[D_n = n-1] \leqslant \mathbf{P}[H].\mathbf{P}_H[D_n = n] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}_I[D_n = n]$$

ce qui, avec les autres inégalités permet de démontrer $\mathbf{P}[D_n = n-1] \leqslant \mathbf{P}[D_n = n]$ et donc $\mathcal{P}_n$

$(\mathbf{P}[H].\mathbf{P}_H[D_n = n] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}_I[D_n = n]) - (\mathbf{P}[H].\mathbf{P}_H[D_n = n-1] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}_I[D_n = n-1])$
$= \mathbf{P}[H].\mathbf{P}[D_{n-1} = n-1] + \mathbf{P}[I].\mathbf{P}[D_{n-1} = n-2] - \mathbf{P}[H].\mathbf{P}[D_{n-1} = n-2] - \mathbf{P}[I].\mathbf{P}[D_{n-1} = n-1]$
$= \mathbf{P}[H].(\mathbf{P}[D_{n-1} = n-1] - \mathbf{P}[D_{n-1} = n-2]) - \mathbf{P}[I].(\mathbf{P}[D_{n-1} = n-1] - \mathbf{P}[D_{n-1} = n-2])$
$= (\mathbf{P}[H] - \mathbf{P}[I])\,(\mathbf{P}[D_{n-1} = n-1] - \mathbf{P}[D_{n-1} = n-2])$
or $\mathbf{P}[D_{n-1} = n-1] \geqslant \mathbf{P}[D_{n-1} = n-2]$ reste donc à montrer que $\mathbf{P}[H] \geqslant \mathbf{P}[I]$

$\mathbf{P}[I]$ est la probabilité que les trois nombres $a < b < c$ du premier tirage vérifient $n < a < b < c \leqslant 2n$
Donc $\mathbf{P}[I] = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{2n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\binom{2n}{3}} = \frac{n(n-1)}{2\binom{2n}{3}} \times \frac{n-2}{3}$
$\mathbf{P}[H]$ est la probabilité que les trois nombres $a < b < c$ du premier tirage vérifient $a < n-1 < n < c$.
Découpons en deux cas selon que b est inférieur ou égal à $n-1$ ou pas :
$0 \leqslant a < b \leqslant n-1 < n < c \leqslant 2n$ correspond à $\binom{n}{2} \times \binom{n}{1}$ tirages
$0 \leqslant a < n-1 < n \leqslant b < c \leqslant 2n$ correspond à $\binom{n-1}{1} \times \binom{n+1}{2}$ tirages
Donc $\mathbf{P}[H] = \frac{\binom{n}{2}\times\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}\times\binom{n+1}{2}}{\binom{2n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\times n+(n-1)\times\frac{(n+1).n}{2}}{\binom{2n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(2n+1)}{2}}{\binom{2n}{3}} = \frac{n(n-1)}{2\binom{2n}{3}} \times (2n+1)$
or $2n+1 \geqslant \frac{n-2}{3}$ donc $\mathbf{P}[H] \geqslant \mathbf{P}[I]$
Ce qui par ce qui précède, démontre $\mathcal{P}_n$

Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0,+\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.
On dit que la fonction f est "k-forte" si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geqslant 0$$

On dit que f est "k-faible" si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leqslant 0$$

I - Quelques exemples et propriétés

1) Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.
Correction :

- f_1 est 1-forte :
  On pose x et y deux réels appartenant à $]0,+\infty[$.
  La fonction $x \mapsto x \times f_1(x) = x^3$ définie sur $]0,+\infty[$, est croissante, donc $yf_1(y) - xf_1(x)$ a le même signe que $y - x$.
  De même la fonction $x \mapsto \frac{f_1(x)}{x} = x$ définie sur $]0,+\infty[$, est croissante, donc $\frac{f_1(y)}{y} - \frac{f_1(x)}{x}$ a le même signe que $y - x$.
  Finalement $yf_1(y) - xf_1(x)$ et $\frac{f_1(y)}{y} - \frac{f_1(x)}{x}$ ont le même signe.
  Donc $(yf_1(y) - xf_1(x))\left(\frac{f_1(y)}{y} - \frac{f_1(x)}{x}\right) \geqslant 0$, donc f_1 est 1-forte

- f_1 est 3-faible :
  On pose x et y deux réels appartenant à $]0,+\infty[$.
  La fonction $x \mapsto x^3 \times f_1(x) = x^5$ définie sur $]0,+\infty[$ est croissante.
  La fonction $x \mapsto \frac{f_1(x)}{x^3} = \frac{1}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$ est décroissante.
  Donc $y^3 f_1(y) - x^3 f_1(x)$ et $\frac{f_1(y)}{y^3} - \frac{f_1(x)}{x^3}$ sont de signes contraires.
  Donc $\left(y^3 f_1(y) - x^3 f_1(x)\right)\left(\frac{f_1(y)}{y^3} - \frac{f_1(x)}{x^3}\right) \leqslant 0$, donc f_1 est 3-faible

2) Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0,1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.
Correction : Posons g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{\exp(x)}{x}$.
g est dérivable et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \frac{x\exp(x) - \exp(x)}{x^2} = \frac{(x-1)\exp(x)}{x^2}$
Donc g est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{f_2(x)}{x} = \frac{\exp(x)}{x}$ définie sur $]0,1[$ est strictement décroissante.
De plus, la fonction $x \mapsto xf_2(x) = x\exp(x)$ définie sur $]0,1[$ est strictement croissante comme produit de fonctions positives et strictement croissantes.
Donc pour tous réels x et y de $]0,1[$, $yf_2(y) - xf_2(x)$ et $\frac{f_2(y)}{y} - \frac{f_2(x)}{x}$ sont de signes contraires. Donc f_2 est 1-faible.
De plus, ces deux fonctions étant strictement croissantes, pour $x = 0,1$ et $y = 0,2$ par exemple, on a $(yf_1(y) - xf_1(x))\left(\frac{f_1(y)}{y} - \frac{f_1(x)}{x}\right) < 0$. Donc f_2 n'est pas 1-forte.

3) Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.
Correction : D'après 2), la fonction $x \mapsto \frac{f_3(x)}{x} = \frac{\exp(x)}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$ est strictement croissante.
Et la fonction $x \mapsto xf_3(x) = x\exp(x)$ est strictement croissante.
Donc avec le même raisonnement qu'en 2), on obtient que f_3 est 1-forte mais pas 1-faible.

4) Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_4(x) = \frac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geqslant 1$
Correction : Soit $k \geqslant 1$ un entier.
La fonction $x \mapsto x^k f_4(x) = x^{k-1}$ définie sur $]0,+\infty[$ est croissante.
La fonction $x \mapsto \frac{f_4(x)}{x^k} = \frac{1}{x^{k+1}}$ définie sur $]0,+\infty[$ est décroissante.
Donc f_4 est k-faible.

5) Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$?
Correction : Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives.
Soit alors k un entier tel que $2^k f(2) > f(1)$ et $\frac{f(2)}{2^k} < f(1)$
Un tel entier existe puisque $\frac{\ln(\frac{f(1)}{f(2)})}{\ln(2)}$ et $\frac{\ln(\frac{f(2)}{f(1)})}{\ln(2)}$ sont bien définis et $k > \max(\frac{\ln(\frac{f(1)}{f(2)})}{\ln(2)}, \frac{\ln(\frac{f(2)}{f(1)})}{\ln(2)})$ convient
Alors $\left(2^k f(2) - 1^k f(1)\right)\left(\frac{f(2)}{2^k} - \frac{f(1)}{1^k}\right) < 0$
Donc f n'est pas k-forte.
Ainsi, pour toute fonction f définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f ne soit pas k-forte.
Il n'existe donc pas de fonction définie sur $]0,+\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$.

II - Quelques critères de force et de faiblesse

6) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\leqslant\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\geqslant\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.
Correction : Soit x et y deux réels appartenant à I.
$\left(y^kf(y)-x^kf(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k}-\frac{f(x)}{x^k}\right)\geqslant 0 \iff f(y)^2-\frac{y^k}{x^k}f(y)f(x)-\frac{x^k}{y^k}f(x)f(y)+f(x)^2\geqslant 0$
$\iff \frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\geqslant\frac{y^k}{x^k}+\frac{x^k}{y^k}$ car $f(x)f(y)>0$
Donc f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\leqslant\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I
. Même chose pour une fonction k-faible en échangeant le sens de l'inégalité.

7) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)}\leqslant\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y)}$$

pour tout réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)}\geqslant\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.
Correction :

- On pose g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x+\frac{1}{x}$
  Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, $g(\frac{a}{b})=g(\frac{b}{a})=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$
- Soit a et b deux réels strictement positifs.
  Si $a\leqslant b$ alors $\frac{a}{b}\leqslant 1\leqslant\frac{b}{a}=\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}$ et $g(\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)})=g(\frac{b}{a})=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$
  et si $b\leqslant a$ alors $\frac{b}{a}\leqslant 1\leqslant\frac{a}{b}=\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}$ et $g(\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)})=g(\frac{a}{b})=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$
  Ainsi, pour tout réels a et b strictement positifs, $\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}\geqslant 1$ et $g(\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)})=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$
- La fonction g est dérivable et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$
  Donc g est croissante sur $[1,+\infty[$
- Finalement, pour tout réels x et y appartenant à I,
  $\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)}\geqslant 1$ et $\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y))}\geqslant 1$ et g est croissante sur $[1,+\infty[$ donc
  $\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)}\leqslant\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y))}\iff g(\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)})\leqslant g(\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y))})\iff\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\leqslant\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}$
  Ce qui permet de conclure en utilisant 6)

8) On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par

$$g_k(x)=x^kf(x)\text{ et }h_k(x)=\frac{f(x)}{x^k}$$

a) Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k-forte ou k-faible.
Correction : Supposons que g_k et h_k soient monotones.

- Si g_k et h_k ont le même sens de variation alors pour tout réels x et y appartenant à I, $g_k(y)-g_k(x)$ et $h_k(y)-g_k(x)$ ont le même signe (identique à $y-x$ si elles sont croissantes ou de signe contraire à $y-x$ si elles sont décroissantes).
  Donc pour tous réels x et y appartenant à I,$(g_k(y)-g_k(x))(h_k(y)-h_k(x))\geqslant 0$.
  Donc f est k-forte.
- Si g_k et h_k n'ont pas le même sens de variation alors pour tout réels x et y appartenant à I, $g_k(y)-g_k(x)$ et $h_k(y)-g_k(x)$ sont de signes contraires.
  Donc pour tous réels x et y appartenant à I,$(g_k(y)-g_k(x))(h_k(y)-h_k(x))\leqslant 0$.
  Donc f et k-faible

b) Démontrer que, si f est k-faible, alors g_k et h_k sont monotones.
Correction : Supposons que f est k-faible.
Soit x et y deux réels appartenant à I avec $x\leqslant y$

- ou bien $f(x) \leqslant f(y)$
  Donc $x^k f(x) \leqslant x^k f(y) \leqslant y^k f(y)$
  Donc $g_k(y) - g_k(x) \geqslant 0$
  Donc $h_k(y) - h_k(x) \leqslant 0$ car f est k-faible

- ou bien $f(x) \geqslant f(y)$
  Donc $\frac{f(x)}{x^k} \geqslant \frac{f(y)}{x^k} \geqslant \frac{f(y)}{y^k}$
  Donc $h_k(y) - h_k(x) \leqslant 0$
  Donc $g_k(y) - g_k(x) \geqslant 0$ car f est k-faible

Finalement, pour tous réels x et y appartenant à I tels que $x \leqslant y$, $g_k(y) - g_k(x) \geqslant 0$ et $h_k(y) - h_k(x) \leqslant 0$
Donc g_k est croissante et h_k est décroissante

c) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4x & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

Correction :

On a $g_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4x^2 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$ et $h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$

g_1 et h_1 ne sont clairement pas monotones. Il reste donc à démontrer que f est 1-forte.
Montrons alors que pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, $(g_1(y) - g_1(x))(h_1(y) - h_1(x)) \geqslant 0$
Cela suffit à démontrer que f est 1-forte puisque si $x = y$ le produit est nul et si $x > y$, alors $(g_1(y) - g_1(x))(h_1(y) - h_1(x)) = (g_1(x) - g_1(y))(h_1(x) - h_1(y)) \geqslant 0$

Procédons par distinction exhaustive de cas sur les valeurs de x et y :

	$g_1(y) - g_1(x)$	$h_1(y) - h_1(x)$
$x < y < 1$	$y^2 - x^2 > 0$	$1 - 1 = 0$
$x < y = 1$	$4 - x^2 > 0$	$4 - 1 = 3 > 0$
$x < 1 < y < 2$	$y^2 - x^2 > 0$	$1 - 1 = 0$
$x < 1 < 2 \leqslant y$	$4y^2 - x^2 > 0$	$4 - 1 = 3 > 0$
$x = 1 < y < 2$	$y^2 - 4 < 0$	$1 - 4 = -3 < 0$
$x = 1 < 2 \leqslant y$	$4y^2 - 4 > 0$	$4 - 4 = 0$
$1 < x < y < 2$	$y^2 - x^2 > 0$	$1 - 1 = 0$
$1 < x < 2 \leqslant y$	$4y^2 - x^2 > 0$	$4 - 1 = 3 > 0$
$2 \leqslant x < y$	$4y^2 - 4x^2 > 0$	$4 - 4 = 0$

Dans tous les cas, le produit $(g_1(y) - g_1(x))(h_1(y) - h_1(x))$ est positif ou nul.
Donc f est 1-forte.

9) On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

a) Démontrer que, si $|f'(x)| \geqslant k\frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-forte.

Correction : f est dérivable, donc g_k et h_k sont dérivables et pour tout $x \in I$:
$g_k'(x) = kx^{k-1}f(x) + x^k f'(x) = x^k \left(k\frac{f(x)}{x} + f'(x)\right)$
$h_k'(x) = -\frac{kf(x)}{x^{k+1}} + \frac{f'(x)}{x^k} = \frac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}\right)$

Supposons que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \geqslant k\frac{f(x)}{x}$.
Pour tout $x \in I$, on a $k\frac{f(x)}{x} > 0$ donc $|f'(x)| > 0$ donc f' ne s'annule pas.
Or f' est continue donc f' garde le même signe (si f' change de signe alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule).

- Ou bien f' est positive sur I et donc pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant k\frac{f(x)}{x}$
  Donc pour tout $x \in I$, $h_k'(x) = \frac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}\right) \geqslant 0$
  Donc h_k est croissante.
  De plus pour tout $x \in I$, $g_k'(x) = x^k\left(k\frac{f(x)}{x} + f'(x)\right) \geqslant 0$
  Donc g_k est croissante

- Ou bien f' est négative sur I et donc pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant -k\frac{f(x)}{x}$
  Donc pour tout $x \in I$, $g_k'(x) = x^k\left(k\frac{f(x)}{x} + f'(x)\right) \leqslant 0$
  Donc g_k est décroissante.
  De plus pour tout $x \in I$, $h_k'(x) = \frac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}\right) \leqslant 0$
  Donc h_k est décroissante.

g_k et h_k sont monotones et ont le même sens de variation donc f est k-forte.

b) Démontrer que, si $|f'(x)| \leqslant k\frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-faible.
Correction : Supposons que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k\frac{f(x)}{x}$.
Pour tout $x \in I$, $-k\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x) \leqslant k\frac{f(x)}{x}$
Et donc pour tout $x \in I$, $0 \leqslant k\frac{f(x)}{x} + f'(x)$ et $f'(x) - k\frac{f(x)}{x} \leqslant 0$
Donc pour tout $x \in I$, $g_k'(x) = x^k\left(k\frac{f(x)}{x} + f'(x)\right) \geqslant 0$ et $h_k'(x) = \frac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}\right) \leqslant 0$
Donc g_k est croissante et h_k est décroissante.
g_k et h_k sont monotones et de sens de variation contraires, donc f est k-faible.

c) Démontrer que les réciproques aux questions 9)a) et 9)b) sont vraies.
Correction :

- Supposons que f est k-forte.
  Montrons par l'absurde que f' ne s'annule pas sur I :
  Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$
  Alors $g_k'(x_0) = {x_0}^k(f'(x_0) + k\frac{f(x_0)}{x_0}) = k{x_0}^{k-1}f(x_0) > 0$
  et $h_k'(x_0) = \frac{1}{{x_0}^k}(f'(x_0) - k\frac{f(x_0)}{x_0}) = -k\frac{f(x_0)}{{x_0}^{k+1}} < 0$
  Or f' est continue, donc g_k' et h_k' sont continues.
  Donc $\lim\limits_{x\to x_0} g_k'(x) = g_k'(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} h_k'(x) = h_k'(x_0)$
  Donc par définition de la limite pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert V contenant x_0 tel que pour tout $x \in V$, $|g_k'(x) - g_k'(x_0)| < \epsilon$ et $|h_k'(x) - h_k'(x_0)| < \epsilon$ (on prend le plus petit des deux intervalles trouvés pour g_k' et pour h_k')
  Comme $g_k'(x_0) \neq 0$ et $h_k'(x_0) \neq 0$, on peut choisir ϵ suffisamment petit de sorte que ni g_k' ni h_k' ne s'annule sur V (on peut prendre $\epsilon = \min(\frac{g_k'(x_0)}{2}, -\frac{h_k'(x_0)}{2})$)
  Ainsi, pour tout $x \in V$, $g_k'(x)$ est du signe de $g_k'(x_0)$ donc strictement positif.
  et pour tout $x \in V$, $h_k'(x)$ est du signe de $h_k'(x_0)$ donc strictement négatif.
  Donc g_k est strictement croissante sur V et h_k est strictement décroissante sur V.
  Comme V est ouvert, il existe $y_0 \in V$ tel que $x_0 < y_0$.
  donc $g_k(y_0) - g_k(x_0) > 0$ et $h_k(y_0) - h_k(x_0) < 0$ donc $(g_k(y_0) - g_k(x_0))(h_k(y_0) - h_k(x_0)) < 0$
  Ce qui est contradictoire avec le fait que f soit k-forte.

  On vient de démontrer que f' ne s'annule pas sur I.
  Donc, comme f' est continue, alors f' garde le même signe sur I.

  - Ou bien f' est positive.
    Pour tout $x \in I$, $g_k'(x) = x^k(f'(x) + k\frac{f(x)}{x}) \geqslant 0$
    Donc g_k est croissante.
    Donc pour tout x et y appartenant à I avec $x \leqslant y$, $g_k(y) - g_k(x) \geqslant 0$
    Donc, puisque f est k-forte, pour tout x et y appartenant à I avec $x \leqslant y$, $h_k(y) - h_k(x) \geqslant 0$
    Donc h_k est croissante.
    Donc pour tout $x \in I$, $h_k'(x) = \frac{1}{x^k}(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}) \geqslant 0$
    Donc pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant k\frac{f(x)}{x}$
  - Ou bien f' est négative
    Pour tout $x \in I$, $h_k'(x) = \frac{1}{x^k}(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}) \leqslant 0$
    Donc h_k est décroissante.
    Donc pour tout x et y appartenant à I avec $x \leqslant y$, $h_k(y) - h_k(x) \leqslant 0$
    Donc, puisque f est k-forte, pour tout x et y appartenant à I avec $x \leqslant y$, $g_k(y) - g_k(x) \leqslant 0$
    Donc g_k est décroissante.
    Donc pour tout $x \in I$, $g_k'(x) = x^k(f'(x) + k\frac{f(x)}{x}) \leqslant 0$
    Donc pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant -k\frac{f(x)}{x}$

  Finalement pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \geqslant k\frac{f(x)}{x}$

- Supposons que f est k-faible.
  Alors d'après 8) b), g_k est croissante et h_k est décroissante.
  g_k est dérivable et croissante donc g_k' est positive.
  Donc pour tout $x \in I$, $g_k'(x) = x^k\left(k\frac{f(x)}{x} + f'(x)\right) \geqslant 0$ donc $0 \leqslant k\frac{f(x)}{x} + f'(x)$
  h_k est dérivable et décroissante donc h_k' est négative.
  Donc pour tout $x \in I$, $h_k'(x) = \frac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\frac{f(x)}{x}\right) \leqslant 0$ donc $f'(x) - k\frac{f(x)}{x} \leqslant 0$
  Donc pour tout $x \in I$, $-k\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x) \leqslant k\frac{f(x)}{x}$
  Donc pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k\frac{f(x)}{x}$

III - Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est " forte " s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-forte, et que f est "faible" s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.

10) Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ est faible.
Correction : supposons que f soit faible. Donc il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.
Donc pour tous réels x et y appartenant à I, $\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$
Donc pour tous réels x et y appartenant à I, $\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{F(y)}{F(x)} + \frac{F(x)}{F(y)}$
Donc F est k-faible, donc F est faible.
On peut noter qu'on peut utiliser le même argument pour démontrer que si f est forte alors $\frac{1}{f}$ est forte.

11) Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonction $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont faibles.
Correction : Montrons tout d'abord que si k et k' sont deux entiers avec $1 \leqslant k \leqslant k'$ et f est k-faible alors f est k'-faible :
Supposons donc que f est k-faible.
Alors g_k est croissante et h_k est décroissante.
Or pour tout $x \in I$, $g_{k'}(x) = x^{k'} f(x) = x^{k'-k} g_k(x)$
Donc $g_{k'}$ est croissante comme produit de fonctions positives croissantes. De même h_k est décroissante et pour tout $x \in I$, $h_{k'}(x) = \frac{f(x)}{x^{k'}} = \frac{h_k(x)}{x^{k'-k}} = h_k(x) \times \frac{1}{x^{k'-k}}$
Donc h'_k est décroissante comme produit de fonctions positives décroissantes.
Ainsi, $g_{k'}$ est croissante et $h_{k'}$ est décroissante donc f est k'-faible

Soit f et g deux fonctions faibles.
Il existe donc deux entiers $k \geqslant 1$ et $k' \geqslant 1$ pour lesquels f est k-faible et g est k'-faible.

- Montrons que $f+g$ est faible.
  Posons $K = \max(k, k')$.
  $k \leqslant K$ donc f est K-faible.
  $k' \leqslant K$ donc g est K-faible.
  Donc les fonctions $x \mapsto x^K f(x)$ et $x \mapsto x^K g(x)$ définies sur I sont croissantes
  Donc la fonction $x \mapsto x^K(f(x)+g(x))$ définie sur I est croissante car somme de fonctions croissantes.
  De même, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+g(x)}{x^K}$ définie sur I est décroissante car somme de fonctions décroissantes.
  Donc $f+g$ est K-faible.
  Donc $f+g$ est faible.

- Montrons que $f \times g$ est faible.
  Posons $K = k + k'$
  La fonction $x \mapsto x^K f(x)g(x) = x^k f(x) \times x^{k'} g(x)$ définie sur I est croissante car produit de fonctions croissantes positives.
  La fonction $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{x^K} = \frac{f(x)}{x^k} \times \frac{g(x)}{x^{k'}}$ définie sur I est décroissante car produit de deux fonctions décroissantes positives.
  Donc $f \times g$ est K-faible.
  Donc $f \times g$ est faible.

- Montrons que $\frac{f}{g}$ est faible.
  $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$
  Or f est faible et $\frac{1}{g}$ est faible d'après 10)
  donc le produit $f \times \frac{1}{g}$ est faible par ce qui précède.
  Donc $\frac{f}{g}$ est faible.

12) Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.
Correction :

- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. f est la somme de la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $]0, +\infty[$ qui est 1-forte d'après 1) et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui est forte car c'est l'inverse de la première.
  De plus f est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$
  f' est continue et pour tout entier $k \geqslant 1$, $|f'(1)| = 0 < 2k = k \times \frac{f(1)}{1}$
  Donc d'après 9)c), pour tout entier $k \geqslant 1$, f n'est pas k-forte
  Donc f n'est pas forte.

  Donc si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes alors $f+g$ n'est pas nécessairement forte.

- La fonction constante $x \mapsto 1$ définie sur I n'est pas forte puisqu'elle est dérivable, de dérivée nulle donc continue, et d'après 9)c), si une fonction forte est dérivable de dérivée continue alors sa dérivée est nécessairement non nulle.
  De plus cette fonction est le produit des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définies sur $]0, +\infty[$ qui sont fortes.

  Donc si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes alors $f \times g$ n'est pas nécessairement forte.

- De même, la fonction constante $x \mapsto 1$ définie sur $]0, +\infty[$ n'est pas forte et elle est le quotient de la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $]0, +\infty[$ par elle même qui est une fonction forte.

  Donc si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes alors $\frac{f}{g}$ n'est pas nécessairement forte.

13) Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0,+\infty[$.

a) Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g\circ f$ est faible.

Correction : Supposons que f et g sont faibles donc il existe deux entiers $k\geqslant 1$ et $k'\geqslant 1$ tels que f est k-faible et g est k'-faible.

Soit x et y deux réels appartenant à I

$$\begin{aligned}
\frac{\max(g(f(x)),g(f(y)))}{\min(g(f(x)),g(f(y)))} &\leqslant \frac{\max(f(x)^{k'},f(y)^{k'})}{\min(f(x)^{k'},f(y)^{k'})} && \text{car } g \text{ est } k'\text{-faible}\\
&\leqslant \left(\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y))}\right)^{k'}\\
&\leqslant \left(\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)}\right)^{k'} && \text{car } f \text{ est } k\text{-faible}\\
&\leqslant \frac{\max(x^{kk'},y^{kk'})}{\min(x^{kk'},y^{kk'})}
\end{aligned}$$

Donc $g\circ f$ est kk'-faible. Donc $g\circ f$ est faible.

b) Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g\circ f$ est forte.

Correction : De même, supposons que f et g sont fortes donc il existe deux entiers $k\geqslant 1$ et $k'\geqslant 1$ tels que f est k-forte et g est k'-forte.

Soit x et y deux réels appartenant à I

$$\begin{aligned}
\frac{\max(g(f(x)),g(f(y)))}{\min(g(f(x)),g(f(y)))} &\geqslant \frac{\max(f(x)^{k'},f(y)^{k'})}{\min(f(x)^{k'},f(y)^{k'})} && \text{car } g \text{ est } k'\text{-forte}\\
&\geqslant \left(\frac{\max(f(x),f(y))}{\min(f(x),f(y))}\right)^{k'}\\
&\geqslant \left(\frac{\max(x^k,y^k)}{\min(x^k,y^k)}\right)^{k'} && \text{car } f \text{ est } k\text{-forte}\\
&\geqslant \frac{\max(x^{kk'},y^{kk'})}{\min(x^{kk'},y^{kk'})}
\end{aligned}$$

Donc $g\circ f$ est kk'-forte. Donc $g\circ f$ est forte.

IV - Application à la démonstration d'inégalités

14) Soit a, b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n\leqslant\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Correction : Soit a, b et c trois réels strictement positifs et n un entier naturel non nul.

Posons f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x+c)^n$

f est dérivable , de dérivée f' continue

Et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=n(x+c)^{n-1}=n\frac{(x+c)^n}{x+c}\leqslant n\frac{(x+c)^n}{x}=n\frac{f(x)}{x}$ car $c>0$

De plus f' est positive, donc pour tout $x\in]0,\infty[$, $|f'(x)|\leqslant n\frac{f(x)}{x}$

Donc par 9)c), f est n-faible.

Donc

$$\frac{f(a)}{f(b)}+\frac{f(b)}{f(a)}\leqslant\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{a^n}$$

Donc

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n\leqslant\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

15) Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ de dérivées respectivement $\cos'=-\sin$ et $\sin'=\cos$.

La fonction tan est définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$. Démontrer que

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)}+\frac{\sin(b)}{\sin(a)}\leqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant\frac{\tan(a)}{\tan(b)}+\frac{\tan(b)}{\tan(a)}$$

Correction :

- Montrons que $x\mapsto\sin(x)$ définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ est 1-faible :
  sin est strictement positive sur $]0,\frac{\pi}{2}[$
  sin est dérivable, de dérivée continue et pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin'(x)|\leqslant\frac{\sin(x)}{x}\iff\cos(x)\leqslant\frac{\sin(x)}{x}\iff x\leqslant\tan(x)$$

Posons f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan(x) - x$
f est dérivable et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0$
Donc f est croissante, et $f(0) = \tan(0) - 0 = 0$, donc f est positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$
Donc pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leqslant \tan(x)$ donc $|\sin'(x)| \leqslant \frac{\sin(x)}{x}$
Donc par 9)b), la fonction $x \mapsto \sin(x)$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est 1-faible.

- Montrons que la fonction $x \mapsto \tan(x)$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est 1-forte :
tan est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$
tan est dérivable et de dérivée continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\tan'(x)| \geqslant \frac{\tan(x)}{x} \iff \frac{1}{\cos^2(x)} \geqslant \frac{\tan(x)}{x} \iff x \geqslant \sin(x)\cos(x) \iff 2x \geqslant \sin(2x)$$

Posons g la fonctions définie sur $]0, \pi[$ par $g(x) = x - \sin(x)$
g est dérivable et pour tout $x \in]0, \pi[$, $g'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$
Donc g est croissante, et $g(0) = 0$, donc g est positive.
Donc pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g(2x) \geqslant 0$ donc $2x \geqslant \sin(2x)$ donc $|\tan'(x)| \geqslant \frac{\tan(x)}{x}$
Donc par 9)b), la fonction $x \mapsto \tan(x)$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est 1-forte.

Finalement, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est 1-faible et la fonction $x \mapsto \tan(x)$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est 1-forte, donc pour tous réels a et b appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}$$