Laboratoire de mathématiques
Lycée Louis Armand
Compte-rendu d'activité
Année 2018-2019

Introduction :

Pour sa première année d'existence, le laboratoire de mathématiques du lycée Louis Armand a travaillé en collaboration avec l'université de Cergy-Pontoise sur le thème du jeu en mathématiques. Notre objectif initial était de créer un jeu mêlant d'une part des contenus mathématiques déclinables sur plusieurs niveaux, et d'autre part de la stratégie. Pour atteindre cet objectif au terme des trois années, nous sommes passés par une phase de création et d'expérimentation de plusieurs jeux. Le travail entamé sera poursuivi et affiné au cours des deux années suivantes.

I. Escalade mathématique :

a. Objectifs pédagogiques :

Bilan sur les fonctions en fin de troisième et réactivation en début de seconde.

b. Déroulement de séance :

En demi-groupe, par groupes de 4.

c. Présentation du jeu :

Jeu de plateau avec cartes de questions réponses sur les fonctions, avec dimension collaborative.
Le jeu se joue à 4, en deux équipes de deux (deux membres de la même équipe sont placés en diagonale) ; ou à 3, en individuel.
Le but est de gravir la montagne niveau par niveau. Pour chaque niveau, 3 parcours différents sont possibles.
Un joueur tire une carte et interroge son voisin de gauche, membre de l'équipe adverse. Le joueur interrogé monte alors son pion d'autant de bonnes réponses trouvées. Puis c'est à son tour d'interroger son voisin de gauche, et ainsi de suite.
Lorsque l'un des joueurs est arrivé au bivouac, il se doit d'attendre son coéquipier pour remporter éventuellement le niveau. Si son coéquipier est en difficulté dans sa montée, on peut faire une « pause aide » pour lui donner des explications avant de l'interroger.

d. Bilan de séance : analyse + perspectives :

Bilan positif en seconde, les élèves ont apprécié le jeu et il leur a permis de réactiver rapidement et efficacement la notion.

II. Cambio :

a. Objectifs pédagogiques :

Travailler sur la compréhension de l'ordre dans la partie décimale des nombres. Bien comprendre, par exemple, la différence entre 5 dixièmes et 5 centièmes dans leurs différentes représentations.

b. Déroulement de séance :

Dans un premier temps, le jeu de carte est présenté, les élèves doivent classer les différentes cartes et ainsi comprendre comment a été construit le jeu. Puis ils ont joué une partie à jeu ouverts, certains sont passés en jeu caché pour la seconde partie. Le tout se déroule en demi groupe, par équipes de 4 ou 5.

c. Présentation du jeu :

Jeu de 52 cartes sur le modèle des jeux classique, les cartes vont de 0,01 à 0,09 (elles jouent le rôle des cartes de 2 à 10 dans un jeu classique) puis il y a 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 (pour valet, dame, roi et as).
Chaque couleur est représentée par une expression différente des nombres, par exemple pour 0,1 il y a aussi 1 centième , 1/100 et 1 centime et ainsi de suite pour les autres cartes
Le but est de d'obtenir un jeu ayant le moins de point possible.

Déroulement du jeu :

Chaque joueur reçoit 4 cartes, le reste des cartes est placé face cachée en pioche.
Un joueur pioche une carte, il a alors le choix d'échanger cette carte avec l'une des siennes ou rejeter la carte piochée, il place alors la carte choisie, face visible, dans le tas de défausse.
Si l'un des joueurs restants a une carte de même valeur dans son jeu, il peut défausser cette carte et a donc alors une carte en moins. Le joueur qui a déposé la carte au départ ne pourra défausser une de ses cartes que si quelqu'un d'autre a placé une carte dans la défausse, on ne défausse pas sur soi-même. On passe alors au joueur suivant, dans le sens des aiguilles d'une montre.

d. Bilan de séance :

Bilan positif, les objectifs pédagogiques ont été atteints, les élèves confondent bien 0,1 et 0,01 par exemple et se reprennent les uns les autres en expliquant pourquoi il y a différence, ou pourquoi un nombre est bien inférieur à un autre.
Lieu d'échange en verbalisant avec le professeur au début puis entre eux, possibilité de proposer des rôles d'arbitre pour ceux que ça intéressent moins.
Possibilité de faire évoluer les règle pour plus de stratégie mais il faut utiliser régulièrement le jeu afin que les élèves s’approprient bien le jeu de carte.

III. Jeu de set :

a. Objectifs pédagogiques :

Entrainement sur la notion de diviseur. Développement de la compétence Communiquer et de l’esprit critique.

b. Déroulement de séance :

En demi-groupe, par groupes de 4.

c. Présentation du jeu :

Le jeu est constitué de 51 cartes portant des numéros verts bleus ou rouges.
On dispose 24 cartes face découverte sur la table.
Chaque joueur à son tour devra choisir 3 cartes telles que :

- Soit les 3 cartes ont un diviseur en commun ET sont de la même couleur ⟹ Rapporte 5 points
- Soit les 3 cartes n’ont aucun diviseur commun ET sont de couleur différente ⟹ Rapporte 10 points

d. Bilan de séance : analyse et perspectives :

Bilan mitigé. Sur les deux groupes ayant testé le jeu, l’un l’a trouvé difficile (ils trouvaient assez facilement les diviseurs mais apprécié de jouer), l’autre s’est amusé et a imaginé des modifications de règles.
Les modifications de règles imaginées sont pertinentes. Il s’agirait de présenter initialement 12 cartes, puis chaque joueur prélevant 3 cartes devrait en remettre alors 1 ou 2 issues de la pioche.

IV. Timelines :

Le jeu de Timeline est très simple et consiste à classer par ordre chronologique un certain nombre de cartes

1) ClassNombres collège:

a. Objectifs pédagogiques :

- Manipuler différentes écritures d'un même nombre.
- Faire du calcul mental.
- Classer des nombres en ordre croissant.

- Favoriser les échanges et les justifications entre les élèves.

b. Présentation du jeu :

Le jeu testé comporte 60 cartes : 12 nombres entiers de 27 à 39 avec 5 cartes avec des écritures différentes de ces 5 nombres. Les règles du jeu sont encore à affiner.

Pour le premier test effectué sur 4 groupes de 5 joueurs, les règles étaient les suivantes :

1ère possibilité : jeu en individuel :

Le but du jeu est d'être le premier à avoir posé toute ses cartes.

- 10 cartes par joueurs.
- les joueurs posent une carte à tour de rôle mais à tout moment du jeu ils peuvent poser une carte sur une carte de même valeur déjà posée.
- Le joueur qui pose une carte doit justifier l'endroit ou il pose sa carte et les autres joueurs doivent valider sa pose, s'il a fait une erreur, la dépose est corrigée collectivement et le joueur qui s'est trompé pioche une nouvelle carte.

2ème possibilité : jeu collaboratif en mode « contre la montre » :

Le groupe reçoit le paquet de 60 cartes et doit les classer en ordre croissant le plus rapidement possible.

Cartes :

4 x 7	2 dizaines et 8 unités	La somme de 17 et 11	La différence entre 40 et 12	Le double de 14
9 x 3	Le triple de 9	2 dizaines et 7 unités	La somme de 9 et 18	La différence entre 100 et 73
5 x 6	Trois dizaines	La somme de 12 et 18	Le triple de 10	La moitié de 60
4 x 8	3 dizaines et 2 unités	Le quadruple de 8	Le produit de 4 et de 8	56 – 24
31	3 dizaines et une unité	La moitié de 62	La différence entre 100 et 69	17 + 14
29	2 dizaines et 9 unités	3 dizaines moins une unité	Le tiers de 87	Le produit de 14,5 et 2
33	3 dizaines et 3 unités	La somme de 10,7 et 22,3	51 - 18	Le produit de 3 et 11

3 dizaines et 4 unités	Le double de 17	La moitié de 68	La somme de 19 et 15	La différence entre 100 et 66
35	Le produit de 7 et 5	La moitié de 7 dizaines	Le quart de 140	4 x 25 – 65
36	9 x 4	Le triple de 12	La différence de 50 et 14	4 dizaines moins 4 unités
37	3 dizaines et 7 unités	La moitié de 74	100 - 63	La somme de 19 et 18
39	4 dizaines moins une unité	Le triple de 13	La somme de 13 et 26	La différence entre 60 et 21

c. Bilan de séance : analyse et perspectives :

Les élèves se sont pris au jeu et même les élèves en difficultés sont entrés dans l'activité. Certains élèves ont eu du mal à gérer la réflexion sur la valeur des cartes et le jeu et ont demandé à utiliser un brouillon.

Le jeu en version collaboratif m'a semblé créer plus d'émulation et de révision sur le vocabulaire que le mode individuel.

Les perspectives sont de créer plusieurs jeux de ce type de différents niveaux pour faire travailler les différentes écritures des nombres, le vocabulaire des opérations, les conversions et le travail de groupe.

Certains jeux pourraient être créés par les élèves ou construits avec eux. L'objectif étant d'utiliser cette base régulièrement.

2) ClassNombres lycée :

a. Objectifs pédagogiques :

Travailler sur la représentation décimale des nombres rencontrés au cours de l’année, et implicitement, manipuler la définition du sens de variation d’une fonction.
Travailler les compétences Raisonner et Calculer.

b. Déroulement de séance :

En classe entière ou demi-groupe, par groupe de 4 élèves.

Durée approximative : 15 minutes sans les démonstrations, 1h avec les démonstrations avec prolongement en recherche libre

c. Présentation du jeu :

Règles du jeu :

Mélanger les cartes pour en former un tas face cachée. Chaque joueur tire une carte et doit la placer dans l’ordre croissant par rapport aux autres cartes déjà placées sur la droite réelle. Chaque

placement sera justifié vis-à-vis des autres joueurs. Si un joueur place une carte au mauvais endroit, il perd un point. La partie s'arrête à l'épuisement du tas, les joueurs ayant le maximum de points gagnent. Le jeu se joue SANS calculatrice.

Cartes :

0	0,3	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	e	$\ln 2$
1	0,7	$\frac{3}{4}$	$-\sqrt{3}$	$e-1$	$\ln 3$
-2	-1,5	$-\frac{5}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{e}$	$-\ln 5$

Vidéos lors d'une expérimentation en terminale S:

Vidéo

d. Bilan de séance: analyse et perspectives

Le jeu a été testé avec une classe de terminale S d'un niveau plutôt bon. Les élèves sont entrés dans l'activité tout à fait naturellement. L'activité a d'ailleurs été réalisée assez rapidement.
D'apparence simpliste, l'interdiction d'utiliser une calculatrice rend l'exercice assez difficile pour certains nombres, notamment pour la version terminale. Certains élèves connaissent d'ailleurs par cœur les décimales de certains nombres, ce qui rend l'exercice très différent. Il est très important que les élèves verbalisent leur argumentation vis-à-vis des autres joueurs (la règle a été modifiée a posteriori). Même si ce n'était pas prévu au départ, il apparaitrait intéressant de demander à chaque groupe d'écrire une démonstration complète de l'ordre des cartes.
Il faudrait également tester la version seconde, d'une part pour le niveau des élèves et d'autre part pour évaluer l'accroche des élèves à l'activité.
Une version numérique en python est en cours de développement.

e. Démonstration (presque) complète :

L'ordre de tirage des cartes n'est ici pas aléatoire, on prend l'ordre des cartes dans le tableau précédent.

$$\boxed{0} \rightarrow \boxed{0}\boxed{1} \rightarrow \boxed{-2}\boxed{0}\boxed{1} \rightarrow \boxed{-2}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{1} \rightarrow \boxed{-2}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{0,7}\boxed{1} \rightarrow \boxed{-2}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{0,7}\boxed{1}$$

Comme $3\times 0,3 = 0,9 < 3\times\frac{1}{3} = 1$ et comme la fonction $f : x \mapsto 3x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors

$0,3 < \frac{1}{3}$ et donc $\boxed{-2}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\frac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{1}$ (la comparaison aux autres nombres est évidente).

Comme $4\times 0,7=2,8<4\times\dfrac{3}{4}=3$ et comme la fonction $f:x\mapsto 4x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors

$0,7<\dfrac{3}{4}$ et donc $\boxed{-2}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}$ (la comparaison aux autres nombres est évidente).

Comme $2\times(-1,5)=-3>2\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{10}{3}$ et comme la fonction $f:x\mapsto 2x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

alors $-1,5>-\dfrac{5}{3}$ et donc $\boxed{-2}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}$ (la comparaison aux autres nombres est évidente).

Comme $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}>\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}=0,5>(0,7)^2=0,49$ et comme la fonction $f:x\mapsto x^2$ est strictement

croissante sur $[0;+\infty[$, alors $\dfrac{3}{4}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0,7$ et donc $\boxed{-2}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}$.

Comme $(-2)^2=4>\left(-\sqrt{3}\right)^2=3>\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$ et comme la fonction $f:x\mapsto x^2$ est strictement décroissante

sur $]-\infty;0]$, alors $-2<-\sqrt{3}<-\dfrac{5}{3}$ et donc $\boxed{-2}\boxed{-\sqrt{3}}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}$.

Comme $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}<1$, alors $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{3}{4}$ (pour tout $x\in\,]0;1[$, $x^2<x<\sqrt{x}$) et donc

$\boxed{-2}\boxed{-\sqrt{3}}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\boxed{1}$.

Comme $e\simeq 2,718281$, alors $\boxed{-2}\boxed{-\sqrt{3}}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}\boxed{e}$.

Comme $e-1\simeq 1,718281$, alors $\boxed{-2}\boxed{-\sqrt{3}}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}\boxed{e-1}\boxed{e}$.

Comme $2<e<3$ et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$ soit

$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{e}<0,5$. Nous avons donc $\boxed{-2}\boxed{-\sqrt{3}}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{\dfrac{1}{e}}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}\boxed{e-1}\boxed{e}$.

Les réponses obtenues précédemment à partir d'une valeur approchée exigible du programme de TS du nombre e deviennent plus difficiles pour les trois derniers nombres exprimés avec du logarithme népérien. Les comparaisons avec les autres nombres sont des questions largement ouvertes, et il apparaît alors nécessaire de relier la fonction $\ln$ avec des objets dont on maitrise davantage les valeurs décimales, et d'utiliser des outils plus performants d'analyse.

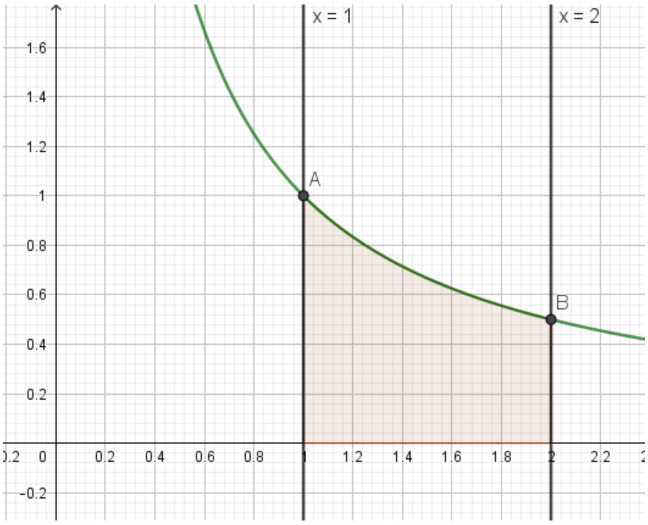
La réponse finale est $\boxed{\boxed{-2}\boxed{-\sqrt{3}}\boxed{-\dfrac{5}{3}}\boxed{-\ln 5}\boxed{-1,5}\boxed{0}\boxed{0,3}\boxed{\dfrac{1}{3}}\boxed{\dfrac{1}{e}}\boxed{\ln 2}\boxed{0,7}\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\boxed{\dfrac{3}{4}}\boxed{1}\boxed{\ln 3}\boxed{e-1}\boxed{e}}$.

La suite présente uniquement des éléments de réponses niveau TS, la question restant encore ouverte.

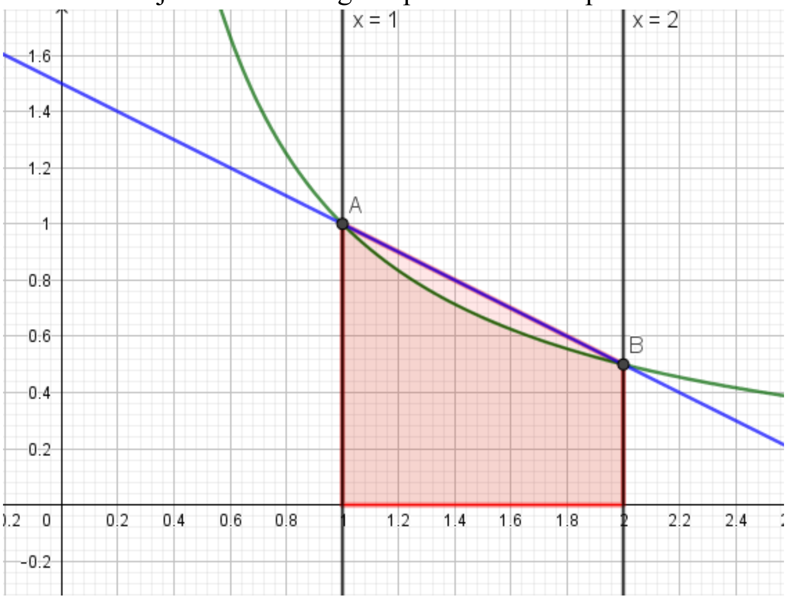
La première idée est d'écrire ces nombres comme résultats d'une intégrale, permettant de relier ces logarithmes à une représentation graphique de la fonction inverse largement maitrisée.

- On a $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$. La figure suivante, obtenue sur Geogebra, s'obtient également de manière assez fidèle à

main levée, quitte à déterminer et tracer les tangentes en 1 et 2 à la courbe de la fonction inverse.



Par des considérations graphiques, on obtient assez facilement l'encadrement $\frac{14}{25} < \ln 2 < \frac{21}{25}$, mais cet encadrement n'est pas suffisant. On majore alors l'intégrale par l'aire du trapèze comme ci-dessous.



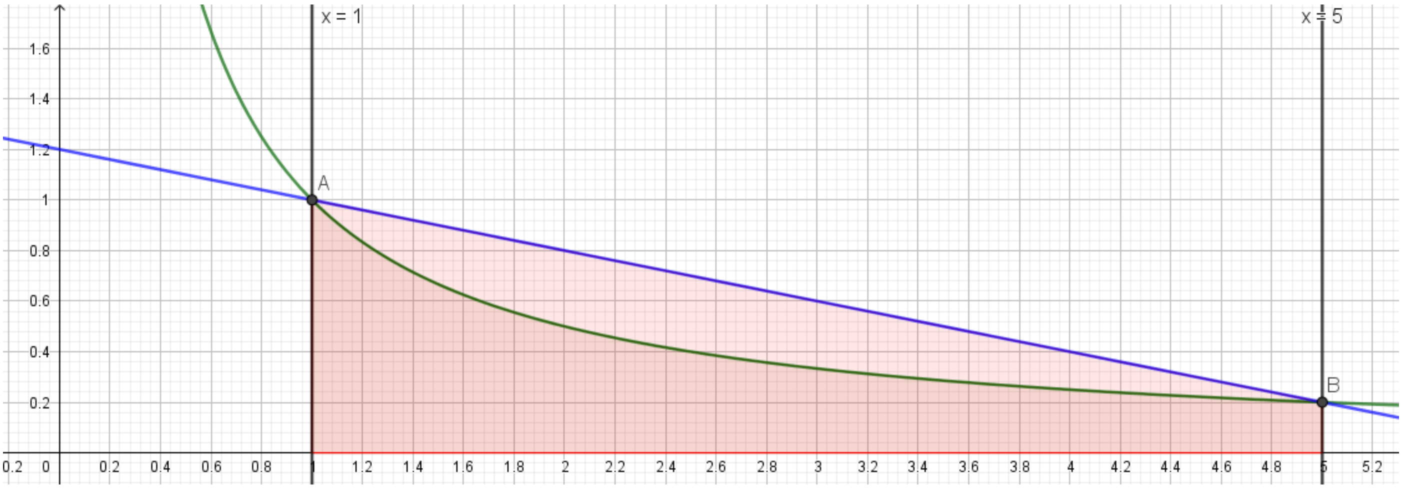
On obtient alors :

$\frac{14}{25} < \ln 2 < \frac{3}{4}$, ce qui est plus précis mais ne permet pas de répondre entièrement à la question.

On serait tenté d'utiliser ici un algorithme utilisant une méthode de Monte-Carlo pour s'approcher plus fidèlement de la valeur exacte, mais il est difficile de réaliser un tirage aléatoire sans calculatrice.

Les développements en série entière du logarithme népérien permettent de donner des écritures de $\ln 2$ en série, par exemple $\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ou $\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k}$, mais on dépasse largement le cadre de la TS.

- On a $\ln 5 = \int_1^5 \frac{1}{x} dx$.



De la même manière que pour $\ln 2$, par des considérations graphiques, on obtient $1,2 < \ln 5 < 2,4$, donc :

$-2,4 < -\ln 5 < -1,2$, ce qui n'est pas totalement satisfaisant.

Si vous avez des propositions à faire ou des éléments de réponses à apporter, n'hésitez pas à les envoyer à l'adresse lycee.armand.ver@labo-maths.fr .

V. Conclusion :

Pour une première année d'existence du laboratoire, nous pouvons considérer que l'objectif a été atteint. Même si nous avons dû diminuer nos exigences, nous avons abouti à la création et l'expérimentation de cinq jeux utilisables directement en classe.

Il conviendra pour les années suivantes de pratiquer un maximum en classe ces jeux, permettant de créer du lien entre les différents niveaux mais aussi entre les différents établissements. Certains jeux nécessitent d'ailleurs une pratique régulière pour appréhender correctement les règles. Cela permettra également d'analyser plus précisément les bénéfices de ces pratiques pour les élèves, tant au niveau de la représentation décimale des nombres et sur les notions d'ordre que sur les notions fondamentales sur les fonctions.