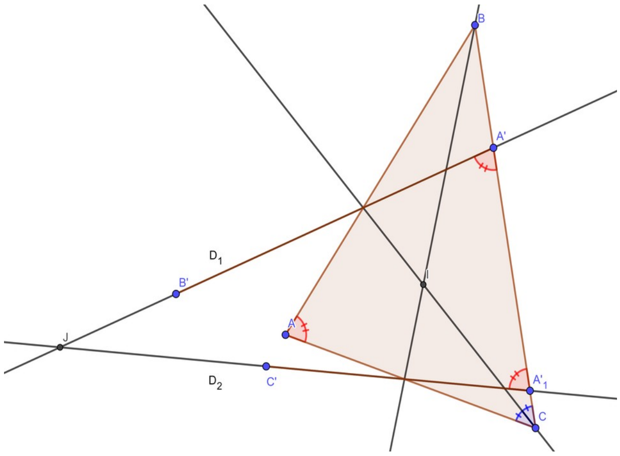
Correction de quelques exercices de géométrie de la pépinière de 1ère 2024-2025

Exercice 1

On note A' et B' les images des points A et B par la symétrie axiale d'axe (CI) et A'_1 et C' les images des points A et C par la symétrie axiale d'axe (BI).



(CI) est la bissectrice de $\widehat{BCI}$ et la symétrie d'axe (CI) conserve les mesures d'angles donc $\widehat{BCI}=\widehat{ICA}=\widehat{ICA'}$.
De l'égalité $\widehat{BCI}=\widehat{A'CI}$, on tire $A'\in(BC)$.
On montre de façon similaire que $A_1'\in(BC)$.
Ainsi, les droites $(A'A'_1)$ et (BC) sont confondues.

La symétrie axiale conserve les longueurs donc $IA=IA'=IA'_1$.
La symétrie axiale conserve les mesures d'angles donc $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C}=\widehat{BA'_1C'}$. (en rouge)
Les angles à la base du triangle $JA'A'_1$ étant de même mesure, $JA'=JA'_1$.
Enfin, les points I et J étant situés à égale distance des points A' et A'_1, la droite (IJ) est la médiatrice du segment $[A'A'_1]$. D'où le résultat.

Exercice 3

Chaque côté du quadrilatère étant un côté d'angle droit, on peut supposer sans perdre de généralité que $AB=7$.
On note $x=AB^2+AD^2+BC^2+CD^2$ la quantité recherchée.
$\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=90°$ Donc d'après le théorème de Pythagore $BD^2=AB^2+AD^2=BC^2+CD^2$ (1).
Le périmètre du quadrilatère est 224 donc $AB+AD+BC+CD=224$ (2).
L'aire du quadrilatère est 2205 et BAD et BCD sont des triangles rectangles donc
$$\frac{AB\times AD+BC\times CD}{2}=2205 \quad (3).$$

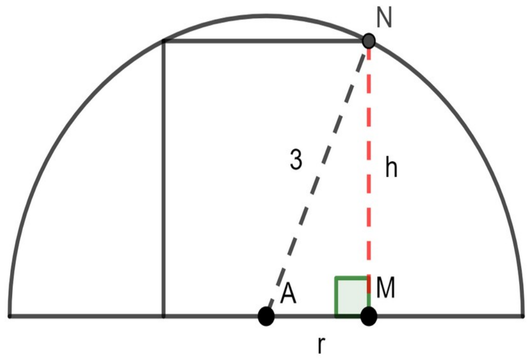
On va calculer la quantité $y=(AB+AD)^2+(BC+CD)^2$ de deux manières.
D'une part, avec (2) , on obtient $y=x+4\times 2205$ en développant directement.
D'autre part, en remarquant avec (3) que $y=(AB+AD)^2+[224-(AB+AD)]^2$, il vient en développant $y=2(AB^2+AD^2)+224^2-2\times 224(AB+AD)+4\,AB\times AD$.
Enfin, puisque d'après (1), $2(AB^2+AD^2)=x$ on a $y=x+224^2-448(AB+AD)+4\,AB\times AD$.

En égalisant les deux expressions et en remplaçant AB par 7 on obtient :
$$x+224^2-448\times(7+AD)+4\times 7\,AD=x+4\times 2205$$
d'où $(4\times 7-448)AD=4\times 2205-224^2+448\times 7$ puis $AD=91$.
Finalement, $x=2(AB^2+AD^2)=2(7^2+91^2)=16660$.

Exercice 5

Soit h la hauteur du cylindre droit de rayon $\sqrt{3}$ inscrit dans la demi-boule et V son volume. Par construction, on a d'après le théorème de Pythagore :

$3^2=(\sqrt{3})^2+h^2$ d'où $h=\sqrt{6}$ puis $V=3\pi\sqrt{6}$.



Soit h la hauteur d'un cylindre droit de rayon R et de volume $V=3\pi\sqrt{6}$ inscrit dans la demi-boule. Son volume étant aussi égal à $\pi R^2 h$ on en déduit que $R^2 h=3\sqrt{6}$ (*).

Par construction, on a d'après le théorème de Pythagore : $3^2=R^2+h^2$

En multipliant cette égalité par $h>0$, on obtient $9h=R^2h+h^3$ puis avec (*) $9h=3\sqrt{6}+h^3$.

h est donc solution de l'équation du troisième degré $x^3-9x+3\sqrt{6}=0$ dont on sait déjà que $\sqrt{6}$ est racine. Il existe donc trois réels a, b et c tels que $(x-\sqrt{6})(ax^2+bx+c)=x^3-9x+3\sqrt{6}$.

On a ainsi $ax^3+(b-\sqrt{6}a)x^2+(cx-\sqrt{6})-\sqrt{6}c=x^3-9x+3\sqrt{6}$.

D'où par identification $a=1$, $c=-3$ et $b=\sqrt{6}$.

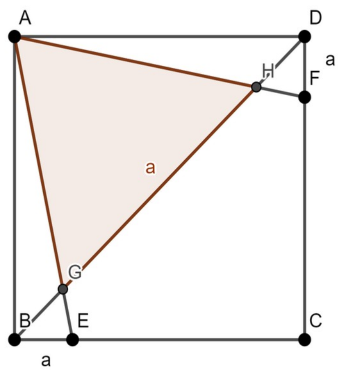
Si $h\neq\sqrt{6}$ alors il est racine du polynôme $x^2+\sqrt{6}x-3$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta=18$ et il possède une seule racine positive $h=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{18}}{2}$.

De $R^2h=3\sqrt{6}$ il vient, $R^2=\dfrac{3\sqrt{6}}{\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{18}}{2}}=\dfrac{3}{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{6}{-1+\sqrt{3}}=\dfrac{6(1+\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=3+3\sqrt{3}$

d'où $R=\sqrt{3+3\sqrt{3}}$.

Exercice 6



Par construction les triangles ADH et AGB sont égaux, on a donc $A_{ADH}=A_{AGB}=\dfrac{A_{ABD}-A_{AGH}}{2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$.

On en déduit que $A_{HDF}=A_{ADF}-A_{ADH}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{6a-1}{12}$

et que $A_{AHB}=A_{AGB}+A_{AGH}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{12}$.

Les droites (AB) et (DF) sont parallèles et les points A, H, F d'une part et B, H, D d'autre part sont alignés dans cet ordre donc d'après le théorème de Thalès les triangles AHB et FHD sont semblables et on a l'égalité de rapport $\dfrac{DF}{AB}=\sqrt{\dfrac{A_{FHD}}{A_{AHB}}}$, ce qui donne en remplaçant

$a=\sqrt{\dfrac{6a-1}{5}}$.

a est donc solution de l'équation du second degré $5a^2-6a+1=0$.

Après résolution de cette équation, on obtient $a=\dfrac{1}{5}$ ou $a=1$ la valeur $a=1$ étant exclue, on en déduit que $a=\dfrac{1}{5}$.