A propos de choix rationnel...

Lycée Jeanne d'Albret

4 février 2020

1. Utilité et théorie de la valeur

Motivation et position du problème

- Dans un modèle (élémentaire...) du marché d'un bien, l'équilibre du marché correspond à une situation où "offre = demande"
  - L'offre et la demande sont des fonctions du prix (entre autres variables)
  - La flexibilité du prix permet d'atteindre l'équilibre (le prix d'équilibre est une solution de l'équation $O(p) = D(p)$)
- ... Il faut donc modéliser la demande (la quantité de biens qu'un agent veut acheter)
- Hypothèse de modélisation des comportements : rationalité individuelle (un agent prend la décision la meilleure compte tenu de son objectif et de son ensemble de choix)
  - C'est une version extrême de l'idée que l'agent prend des décisions adaptées à son environnement
  - Cela suppose la définition de l'objectif (une relation de préférences sur l'ensemble de choix)
  - Le problème de l'agent = problème mathématique d'optimisation sous contrainte

Le problème du consommateur

- Un agent dispose d'un revenu R qu'il consacre à l'achat de quantités (x_1, x_2) de deux biens (de prix unitaires (p_1, p_2))
- Ensemble de choix de l'agent (ensemble budgétaire) défini par 3 contraintes :

$$B_{p_1,p_2,R} = \left\{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\right\}$$

- Quel panier de biens (x_1, x_2) acheter ?
  - Préférences de l'agent décrites par une fonction d'utilité $u(x_1, x_2)$
  - L'agent achète (x_1, x_2) solution de

$$\max_{(x_1,x_2)\in B_{p_1,p_2,R}} u(x_1, x_2)$$

Un exemple : utilité Cobb-Douglas

- $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (et $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$)
- La demande est (pour $i = 1, 2$)

$$x_i = \frac{\alpha_i R}{p_i}$$

- à lire sous la forme "parts budgétaires constantes" :

$$\frac{p_i x_i}{R} = \alpha_i$$

Résolution du problème d'optimisation

- Maximisation non contrainte $\max_{x \in X} f(x)$
  - Avec les bonnes hypothèses sur f et sur X, existence d'une solution unique qui s'obtient en résolvant $f'(x) = 0$
  - Notamment stricte concavité de f ($f'' < 0$)
- Maximisation contrainte : on généralise les idées précédentes
  - La solution unique s'obtient en résolvant un ensemble de conditions de premier ordre (du type "dérivée d'une fonction $= 0$") sous de bonnes hypothèses de convexité (sur l'objectif et sur les contraintes)
  - Mais on utilise une fonction auxiliaire : le Lagrangien

$$L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = u(x_1, x_2) + \lambda (R - p_1 x_1 - p_2 x_2) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

- Hypothèse sur u : (stricte) quasi-concavité
  - Définition : pour tout $\bar{u}$, $\left\{x \in \boldsymbol{R}_{+}^{2} : u\left(x\right) \geq \bar{u}\right\}$ convexe
  - Interprétation économique : goût pour la diversité

$$u\left(x\right) = u\left(x'\right) \Rightarrow \forall \alpha \in \left]0,1\right[, u\left(\alpha x + \left(1-\alpha\right)x'\right) \geq u\left(x\right)$$

- Conditions de 1er ordre

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

et d'autres qu'on ne montrera pas ici

Théorie de la valeur

- Sous certaines hypothèses, les C1O impliquent que l'optimum vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1$$

  Le prix reflète l'utilité marginale du bien
- Esquisse d'une théorie de la valeur :
  - La valeur d'un bien peut se penser comme une valeur marchande (un prix), une valeur d'usage (une utilité... marginale), un coût de production
  - Cette théorie montre que sous les conditions permettant un fonctionnement "idéal" du marché, valeur marchande et valeur d'usage s'égalisent
  - Si on modélisait la production, on aurait l'égalité avec le coût (marginal) de production

- De façon plus générale, les C1O impliquent que l'optimum vérifie

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Le membre de droite est le prix relatif (on échange sur le marché une unité de bien 1 contre $\frac{p_1}{p_2}$ unités de bien 2)
- Le membre de gauche est le taux auquel l'agent accepte d'échanger (il cède $dx_2 < 0$ en échange de $dx_1 > 0$)

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 \\ du &> 0 \Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} < \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \end{aligned}$$

2. Choix en univers incertain

Paradoxe de Saint-Petersbourg (Bernouilli 1738)

- Combien accepteriez vous de payer pour jouer à la loterie suivante ?
  - On tire à pile ou face. Si c'est pile (proba $\frac{1}{2}$), alors le joueur gagne 2. Si c'est face (proba $\frac{1}{2}$), alors on tire à pile ou face une deuxième fois
  - Si c'est pile, alors le joueur gagne 2^2. Si c'est face, alors on tire à pile ou face une troisième fois
  - etc.
  - Le jeu s'arrête au premier pile (au $n-ème$ tirage), le joueur gagne 2^n

- L'espérance de profit est $+\infty$, quel que soit le prix payé
- Mais la plupart des gens refusent de payer un prix trop élevé
- Ce paradoxe dit que le comportement n'est pas correctement décrit par la maximisation de l'espérance de gain
- Interprétation : vous refusez une espérance de profit infinie parce que ce profit est aléatoire, vous êtes averse au risque

Modélisation de l'aversion au risque

- Maximisation d'une espérance d'utilité

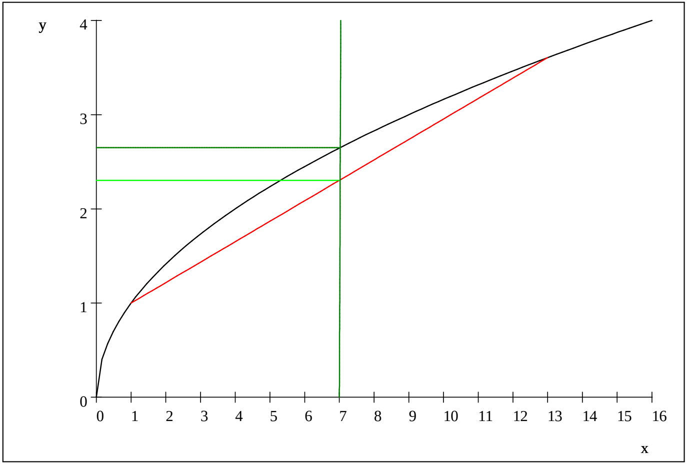
$$U(L) = \sum_n \pi_n u(x_n)$$

  - une loterie $L =$ une distribution de gain x_n (π_n proba de x_n)
  - Face à un ensemble de loteries, l'agent choisit celle qui maximise U
  - ce critère "dissocie" l'utilité du gain (utilité u) de la perception de l'aléa

- Aversion au risque correspond à la concavité de u

$$\sum_n \pi_n u(x_n) \leq u\left(\sum_n \pi_n x_n\right)$$

- Un exemple usuel : $u(x) = \sqrt{x}$



- loterie : 1 ou 13 (proba $\frac{1}{2}$ chacun)

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{13} < \sqrt{\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}13}$$

Application : modèle élementaire de marché financier

- Chaque agent répartit sa richesse entre différents actifs financiers
  - un actif financier est en général risqué : prix courant p, valeur future aléatoire θ (rendement $1 + R = \frac{\theta}{p}$)
  - un actif financier particulier : rendement r certain
  - l'agent maximise l'espérance d'utilité de la valeur future de son portefeuille (il préfère les actifs les plus rentables "en moyenne" et les moins risqués)
- L'aversion au risque implique l'existence d'une "prime de risque" : l'agent "exige une rémunération" pour détenir des actifs risqués (espérance de rendement du portefeuille supérieure à r)
- A l'équilibre, les prix courants s'ajustent de sorte à ce que "offre = demande" (les agents détiennent les stocks d'actifs existants)
  - Donc : pas de rendement sans risque
  - La corrélation d'un actif aux autres joue un rôle fondamental (exemple : une corrélation négative implique une espérance de rendement inférieure à r car diminue le risque du portefeuille)

Au-delà de l'espérance d'utilité

- Critère d'espérance d'utilité : le modèle de choix en incertain sur lequel s'appuient (encore) la plupart des modèles
- Des limites empiriques...
  - notamment le paradoxe d'Allais (1953)
  - développé par Kahneman et Tversky (1979), cf. les exemples ci-après
  - et aussi d'autres problèmes (par exemple liés à l'incertitude sur les probabilités des événements, paradoxe d'Ellsberg 1961)

Un premier exemple (effet de certitude)

- Un premier choix à effectuer entre
  - L_1 : 3000 avec proba 1
  - L_2 : 4000 avec proba 0,8 (et 0 avec proba 0,2)
- Un second choix à effectuer entre
  - L'_1 : 3000 avec proba 0,25 (et 0 avec proba 0,75)
  - L'_2 : 4000 avec proba 0,2 (et 0 avec proba 0,8)
- Beaucoup de gens choisissent L_1 et L'_2
  - Les gens sont attirés par les gains certains
  - Quand les gains sont de probabilité plus faible, les gens choisissent le gain le plus large

- Choix incohérents avec la théorie EU : si on suppose qu'il existe une utilité u, alors
    - le choix de L_1 s'écrit

$$u\left(3000\right) > \frac{1}{5}u\left(0\right) + \frac{4}{5}u\left(4000\right)$$

    - et celui de L_2' s'écrit

$$\frac{3}{4}u\left(0\right) + \frac{1}{4}u\left(3000\right) < \frac{4}{5}u\left(0\right) + \frac{1}{5}u\left(4000\right)$$

    - Les deux relations sont contradictoires

Deuxième exemple

- Un premier choix à effectuer entre
  - L_1 : 6000 avec proba 0,45 (et 0 avec proba 0,55)
  - L_2 : 3000 avec proba 0,9 (et 0 avec proba 0,1)
- Un second choix à effectuer entre
  - L'_1 : 6000 avec proba 0,001 (et 0 avec proba 0,999)
  - L'_2 : 3000 avec proba 0,002 (et 0 avec proba 0,998)
- Beaucoup de gens choisissent L_2 et L'_1 (incohérents avec la théorie EU)

Différence entre gains et pertes

- Un premier choix à effectuer entre
  - L_3 : -3000 avec une proba 1
  - L_4 : -4000 avec proba 0,8 (et 0 avec proba 0,2)
- Un second choix à effectuer entre
  - L_3' : 3000 avec une proba 1
  - L_4' : 4000 avec proba 0,8 (et 0 avec proba 0,2)
- Beaucoup de gens choisissent L_4 et L_3'
- Le comportement n'est pas "symétrique" :
  - Aversion au risque pour les gains

$$E\left(gain\ de\ L_4'\right) > E\left(gain\ de\ L_3'\right)$$

  - Goût pour le risque pour les pertes

$$E\left(gain\ de\ L_4\right) < E\left(gain\ de\ L_3\right)$$

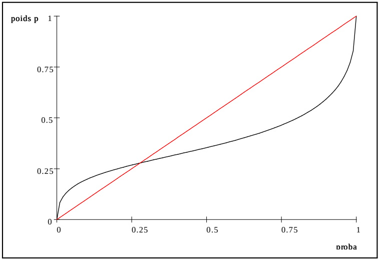
(Cumulative) Prospect Theory

- Une des théories dépassant l'EU (Kahneman et Tversky, 1979, 1992)
- Pour expliquer ces exemples :
  - on renonce à la linéarité en probabilités (déformation des probabilités par les agents)
  - on évalue les loteries en considérant les variations (gains, pertes) par rapport à un point de référence (spécifique à l'agent et au problème auquel il fait face)
- L'utilité d'une loterie L s'écrit

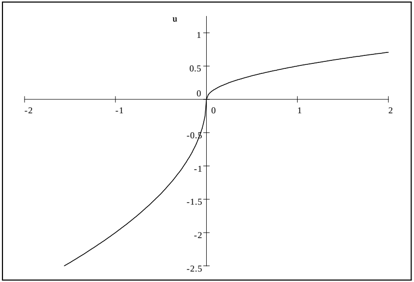
$$U(L) = \sum_n p_n u(x_n)$$

  - les x_n sont les pertes ($x_n < 0$) ou les gains ($x_n > 0$) par rapport à la situation de référence
  - les poids p_n sont des fonctions non-linéaires des probabilités des x_n

- Surpondération des faibles probabilités π : un exemple de fonction $p = w(\pi)$



- Un exemple de fonction u



Les quatre types de comportements

- La puissance de cette théorie (par rapport à EU) est sa capacité à décrire un agent qui joue au loto, achète une assurance et place son épargne de façon prudente

	gains	*pertes*
faibles probabilités	recherche du risque (jeu de hasard)	aversion au risque (assurance)
fortes probabilités	aversion au risque	recherche du risque

- Cette classification s'obtient en combinant l'effet de la sous/sur pondération des probabilités et de la convexité/concavité de l'utilité (pour les faibles probabilités, la surpondération domine l'effet de la convexité/concavité de u)

- La *cumulative prospect theory* élimine certains défauts de la *prospect theory*
- Elle restreint notamment la surpondération aux événements extrêmes (très grands gains/pertes ayant une faible probabilité)
  - Le poids du gain x_n est

$$
\begin{aligned}
p_n &= w^+\left(\sum_{k\geq n}\pi_k\right) - w^+\left(\sum_{k\geq n+1}\pi_k\right) \text{ pour } n \leq N-1 \\
p_N &= w^+\left(\pi_N\right)
\end{aligned}
$$

  - où π_n est la proba du gain x_n ($x_1 < ... < x_N$) et w^+ une fonction de la probabilité de gagner au moins x_n
  - Même construction dans le domaine des pertes (w^- définie sur les probabilités de perdre au moins x_m)