

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminales ES et L

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I
Fonctions de type C

1° Soit a et b deux réels distincts et soit h l'application qui à tout réel t de $[0, 1]$ associe

$$h(t) = ta + (1 - t)b.$$

On suppose dans un premier temps que $a < b$.

- (a) En étudiant les variations de h sur $[0, 1]$, montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t) \in [a, b]$.
- (b) Montrer que pour tout réel x de $[a, b]$, il existe un unique t de $[0, 1]$ tel que $h(t) = x$. Exprimer t en fonction de x , a et b .
- (c) Adapter ce qui précède au cas $b < a$.

2° Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I et soit a et b deux réels distincts de I . On note Δ la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. On rappelle d'autre part que le segment $[AB]$ est appelé *corde* définie par A et B .

- (a) Quelle est l'équation de la droite Δ ?
- (b) Pour tout réel t , on note $P(t)$ le point de Δ d'abscisse $ta + (1 - t)b$. Montrer que l'ordonnée de $P(t)$ est égale à $tf(a) + (1 - t)f(b)$. Quel est l'ensemble décrit par $P(t)$ quand t décrit $[0, 1]$?

Dans la suite de ce problème, on dira qu'une fonction définie sur un intervalle I est de « type C » sur I si pour tous a, b dans I et pour tout $t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$.

3° Justifier, à l'aide des questions précédentes, que la courbe d'une fonction de type C est en dessous de ses cordes.

- 4° (a) La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle de type C sur \mathbb{R} ?
- (b) La fonction $x \mapsto x^2$ est-elle de type C sur \mathbb{R} ?
- (c) Pour tout réel x , on appelle partie entière de x et on note $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple, $[4] = 4$, $[\pi] = 3$, $[1,35] = 1$, $[-\sqrt{2}] = -2$.
 - i. Tracer la représentation graphique de la fonction $x \mapsto [x]$ sur le segment $[-2, 2]$.
 - ii. La fonction $x \mapsto [x]$ est-elle de type C sur $[-2, 2]$? Sur $[0, 1]$?

5° On suppose ici que f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , telle que sa fonction dérivée seconde f'' soit positive sur I .

Soit a et b deux réels de I . On supposera ici, pour fixer les idées, que $a < b$.

On définit φ l'application qui à tout $t \in [0, 1]$ associe $\varphi(t) = tf(a) + (1 - t)f(b) - f(ta + (1 - t)b)$.

- (a) On admet que si $u : t \mapsto u(t)$ est dérivable sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[a, b]$ et si f est dérivable sur $[a, b]$, alors $t \mapsto f(u(t))$ est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée est $t \mapsto u'(t)f'(u(t))$ sur $[0, 1]$. Justifier que φ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi''(t) \leq 0$.
- (b) Que peut-on en déduire pour la fonction φ' ?
- (c) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire que φ' ne peut pas rester strictement positive sur $[0, 1]$, et qu'elle ne peut pas non plus rester strictement négative sur $[0, 1]$. Donner alors l'allure du tableau de variations de φ .
- (d) Conclure que f est de type C sur I .

6° (a) Justifier à l'aide de la question précédente que la fonction $x \mapsto -\ln x$ est de type C sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Soit x, y et z trois réels strictement positifs.

En écrivant que $\frac{1}{3}(x + y + z) = \frac{2}{3}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{z}{3}$, montrer que $\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{\ln x + \ln y + \ln z}{3}$.

(c) En déduire que pour tous réels strictement positifs x, y et z ,

$$(xyz)^{1/3} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

PROBLÈME II

Étude d'une suite

Dans ce problème, on étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Partie A

Dans cette partie, on considère l'équation (E) $x^2 - x - 1 = 0$.

1° Résoudre (E).

2° On note α la solution strictement positive de (E).

Montrer que la seconde solution, que l'on notera β , vérifie $\beta = 1 - \alpha = -\frac{1}{\alpha}$.

Les deux parties suivantes B et C sont indépendantes entre elles. Le candidat choisit celle qu'il souhaite traiter.

La partie B utilise l'enseignement de spécialité de la série ES et est destinée aux candidats ayant suivi cet enseignement. La partie C est destinée aux élèves de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et aux élèves de la série L.

Partie B

1° On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

(a) Que vaut X_0 ?

(b) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de X_n en fonction de A^n et X_0 ,

2° On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$. Montrer que $AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$.

3° Montrer que la matrice P ayant pour colonnes, dans cet ordre, C_1 et C_2 , est inversible.

4° (a) Soit M et N des matrices carrées d'ordre 2. On note K_1 et K_2 les colonnes de N . Justifier que la matrice MN a pour colonnes MK_1 et MK_2 .

(b) À quoi est égale la matrice $P^{-1}P$? En déduire, sans utiliser l'expression explicite de la matrice P^{-1} , l'expression des colonnes $P^{-1}C_1$ et $P^{-1}C_2$.

(c) En déduire, à l'aide du moins de calculs possible, l'expression de la matrice $P^{-1}AP$.

5° (a) Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Donner l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire l'expression de A^n , puis de X_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$.

1° Montrer, pour tout entier n , que $v_{n+1} = \beta v_n$.

2° En déduire une expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3° Donner de même une expression de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie D

1° Déduire des résultats de la partie B ou de la partie C une expression de u_n en fonction de n , α et β , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2° Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3° Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

PROBLÈME III

Jeu de pile ou face

On dispose d'une pièce de monnaie, non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p \in]0, 1[$. On pourra poser $q = 1 - p$.

Un jeu se déroule de la manière suivante.

Un joueur lance successivement et indépendamment n fois la pièce, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Chaque fois que le joueur obtient Pile, il gagne 1 euro et chaque fois qu'il obtient Face, il perd 1 euro. La fortune initiale du joueur est f_0 euros, où f_0 est un entier relatif (une dette est comptée comme une fortune négative et le joueur peut être débiteur en début de jeu).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note X_k la variable aléatoire définie par :

- $X_k = 1$ si le joueur obtient Pile au k -ième lancer;
- $X_k = -1$ si le joueur obtient Face au k -ième lancer.

On définit de plus les variables aléatoires suivantes :

- Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $G_k = X_1 + \dots + X_k = \sum_{i=1}^k X_i$;
- $F_0 = f_0$;
- Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, F_k est la variable aléatoire égale à la fortune du joueur, positive ou négative, après le k -ième lancer.

On munit le plan d'un repère orthonormé. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n$, on considère le point $M_k(k, F_k)$ dont l'abscisse est égale à k et l'ordonnée est égale à F_k .

On appelle *trajectoire* la ligne brisée dont les sommets sont les points $M_k(k, F_k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

Ainsi M_0 est le point de coordonnées $(0, F_0)$.

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons d'obtenir k Pile et $n - k$ Face après n lancers de pièce.

Partie A

On prend dans cette partie $n = 5$ et $f_0 = 2$.

- 1° Représenter une trajectoire possible.
- 2° Étant donné un point $M(5, y)$, avec y entier relatif, existe-t-il toujours une trajectoire de M_0 à $M(5, y)$?
- 3° Donner un algorithme qui affiche les coordonnées d'un point d'arrivée à l'issue de cinq lancers.

Partie B

- 1° Construire à partir de X_i une variable aléatoire Y_i suivant une loi de Bernoulli, à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que $Y_i = 1$ si le joueur obtient Pile au i -ème lancer et $Y_i = 0$ si le joueur obtient Face au i -ème lancer.
- 2° Donner, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la loi de G_k puis celle de F_k .

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et b un entier relatif. On note $M(n, b)$ le point de coordonnées (n, b) .

- 3° (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur b pour qu'il existe une trajectoire de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$.
On note D l'ensemble des entiers relatifs b pour lesquels cette condition est vérifiée.
- (b) Pour $b \in D$, donner en fonction de n, b, f_0, p la probabilité $P(n, b, f_0, p)$ que la fortune du joueur soit b à l'issue de n parties.
- 4° On suppose dans cette question que la fortune initiale du joueur est $f_0 > 0$ (sauf dans la question 4° (c) où $f_0 \geq 0$) et que sa fortune à la fin du jeu est égale à $b \in D$ où $b > 0$.
 - (a) On note M'_0 le symétrique du point M_0 par rapport à l'axe des abscisses.
Montrer qu'il y a autant de trajectoires de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$ ayant au moins un sommet sur l'axe des abscisses que de trajectoires de M'_0 à $M(n, b)$.

- (b) En déduire la probabilité que dans une trajectoire de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$, tous les sommets aient une ordonnée strictement positive.
 À quoi correspond pour le joueur une telle trajectoire?
- (c) On suppose dans cette question que $f_0 \geq 0$ et on suppose encore que la fortune du joueur à la fin du jeu est égale à $b \in D$ où $b > 0$.
 Quelle est la probabilité que dans une trajectoire de $M_0(0, f_0)$ à $M(n, b)$, tous les sommets aient une ordonnée positive ou nulle?
 À quelle situation du joueur correspond une telle trajectoire?

Partie C

On considère maintenant que la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$) et on suppose que $f_0 = 0$. Le joueur lance la pièce $2n$ fois. Soit b un entier relatif tel qu'il existe une trajectoire de $M_0(0, 0)$ à $M(2n, b)$.

On considère les trajectoires de $M_0(0, 0)$ à $M(2n, b)$.

1° Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq 2n$.

Montrer que si une trajectoire de $M_0(0, 0)$ à $M(2n, b)$ passe par le point $(k, 0)$, alors k est pair.

2° Calculer $p_{2n} = P(F_{2n} = 0)$.

3° Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note N_{2n} le nombre de trajectoires de $M_0(0, 0)$ à $M(2n, 0)$ telles que, pour tout entier $i \in [1, 2n - 1]$, F_i est strictement positif. Montrer

$$N_{2n} = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}.$$