

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2015

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Petits poids

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et toute suite finie de n réels (x_1, x_2, \dots, x_n) , on appelle *poids* de la suite la plus grande des valeurs $|x_1|, |x_1 + x_2|, \dots, |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$.

Par exemple, pour $n = 4$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 4, 0, -9)$, le poids de la suite est égal à 8, car

$$|x_1| = 4, |x_1 + x_2| = 8, |x_1 + x_2 + x_3| = 8 \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1.$$

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, 4, 0, 4)$, le poids est égal à 9, car

$$|x_1| = 9, |x_1 + x_2| = 5, |x_1 + x_2 + x_3| = 5 \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1.$$

On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1° Déterminer le poids des suites finies suivantes :

- $(3, 5, -6, -8, 2)$ (et donc $n = 5$).
- $(1, 2, 3, \dots, 2014, 2015, -2015, -2014, \dots, -2, -1)$ (et donc $n = 4030$).
- Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de n réels (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces n réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note I ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant.

Elle commence par choisir parmi les n réels un nombre, noté c_1 , de sorte que la valeur de $|c_1|$ soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre c_2 parmi les $n - 1$ réels qui restent, afin que la valeur de $|c_1 + c_2|$ soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres c_1, \dots, c_i parmi les n réels donnés au départ, elle choisit c_{i+1} parmi les $n - i$ restants de sorte que la valeur de $|c_1 + \dots + c_i + c_{i+1}|$ soit la plus petite possible.

Elle obtient finalement une suite finie (c_1, \dots, c_n) de n réels. On note C son poids.

2° Déterminer I et C dans les deux cas suivants.

- $n = 3$ et $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4$.
- $n = 4$ et $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

3° Si $n = 2$, montrer que $I = C$.

4° Si $n = 3$, montrer que $C \leq \frac{3}{2}I$.

5° Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit (x_1, x_2, \dots, x_n) la suite finie donnée à Isabelle et Clara.

On pose

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad S = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \quad N = \max(M, S).$$

Autrement dit, M est le plus grand des nombres $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$. De même, N est le plus grand des nombres M et S .

- Montrer que $S \leq I$.
- Montrer que $M \leq 2I$.
- Montrer que $C \leq N$.
- En déduire que $C \leq 2I$.
- Déterminer n réels x_1, x_2, \dots, x_n tels que $C = 2I$.

PROBLÈME II

Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires A, B, C, D . Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]$.

Dans les questions 1° à 3°, $ABCD$ désigne un tétraèdre.

- 1° a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
- b) Montrer que $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AG}_A$, où G_A est le centre de gravité du triangle BCD .
- c) On appelle *médiane* issue de A la droite reliant A au centre de gravité du triangle BCD , et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de B , de C et de D . Montrer que les médianes sont concourantes au point G .
- 2° Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C, D . On l'appelle *sphère circonscrite* au tétraèdre $ABCD$ et on note O son centre.
- 3° On appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et orthogonale au plan BCD . On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de B , de C et de D . On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
 - a) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier?
 - b) Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes?
 - c) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier?
- 4° Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} est noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Soit $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H . Pour $1 \leq i \leq 4$, on choisit un vecteur directeur unitaire \vec{u}_i de Δ_i et, pour $1 \leq i, j \leq 4$, on note $c_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$.

 - a) On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23}$.
 - b) Réciproquement, si $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} \neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

PROBLÈME III

Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, \dots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de type \mathcal{M} si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}.$$

- 1° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de type \mathcal{M} et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n - C)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- 2° Montrer que toute suite croissante de type \mathcal{M} est constante.
- 3° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de type \mathcal{M} . On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = b = 0$.
- 4° L'objectif de cette question 4° est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type \mathcal{M} est constante.

Dans les questions a) et b), on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de type \mathcal{M} à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.

 - a) Soit p un entier tel que $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$. En déduire que $u_p \leq 3u_r$.
 - b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_p \leq 3u_r$.

Dans les questions c) et d), on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite minorée de type \mathcal{M} .

 - c) Soit D un réel strictement positif et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_p - D$ n'est pas un minorant de la suite (u_n) , alors $u_p - \frac{3}{2}D$ n'est pas non plus un minorant.
 - d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
 - e) Conclure.
- 5° Existe-t-il une suite non constante de type \mathcal{M} ?