

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2019

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminales ES et L

DURÉE : 5 HEURES

<p>L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Marche aléatoire

Soit q un entier naturel.

Un individu se déplace sur les points d'abscisse $0, 1, 2, \dots, q$ selon les règles suivantes :

- À l'instant 0, il est placé au point d'abscisse q .
- Si à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) l'individu est placé sur le point d'abscisse k , alors, à l'instant $n + 1$, l'individu est placé de façon équiprobable sur l'un des $k + 1$ points d'abscisses $0, 1, 2, \dots, k$.

Pour tout entier naturel n , on définit la variable aléatoire X_n qui est égale à l'abscisse du point où est placé l'individu à l'instant n .

On note $P(A)$ la probabilité d'un évènement A et $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X .

1° Dans cette question, on suppose $q = 1$.

(a) Justifier que $P(X_0 = 1) = 1$, et que $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que $P(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X_2 = 0) = \frac{3}{4}$.

(c) Pour tout entier naturel n , montrer

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1).$$

(d) Pour tout entier naturel n , déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 0)$. Déterminer alors les limites de $P(X_n = 1)$ et de $P(X_n = 0)$ quand n tend vers l'infini.

(e) Pour tout entier naturel n , déterminer $E(X_n)$. En déduire la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

(f) Soit U_n la matrice ligne $U_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1))$

Déterminer une matrice carrée M à deux lignes et deux colonnes telle que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n M$.

2° Dans cette question, on suppose $q = 2$.

(a) Exprimer $P(X_{n+1} = 0)$ à l'aide de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$.

Exprimer de même $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$.

(b) Pour tout entier naturel n , soit U_n la matrice ligne $U_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2))$.

Déterminer une matrice carrée M à trois lignes et trois colonnes telle que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n M$.

(c) On considère la matrice colonne $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exprimer le résultat du produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de A .

(d) Exprimer $E(X_{n+1})$ à l'aide de U_{n+1} et A .

(e) En déduire une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

(f) Montrer que la suite $(P(X_n = 2))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, que l'on déterminera.

(g) En combinant les deux questions précédentes, montrer, pour tout entier naturel n ,

$$P(X_n = 1) = 2 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right).$$

(h) En déduire, pour tout entier naturel n ,

$$P(X_n = 0) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}.$$

(i) Donner les limites de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$ quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat.

3° On suppose dans cette question $q = 3$.

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Exprimer MA à l'aide de A . Exprimer MB à l'aide de B .
(b) Pour tout entier naturel n , on pose

$$\alpha_n = E(X_n) \quad \text{et} \quad \beta_n = E\left(\frac{1}{2}X_n(X_n - 1)\right).$$

À l'aide de la question précédente, montrer que (α_n) et (β_n) sont des suites géométriques.

En déduire des expressions de α_n et de β_n en fonction de n .

- (c) Pour tout entier naturel n , déterminer $P(X_n = 3)$.
(d) Pour tout entier naturel n , déterminer $P(X_n = 2)$. On pourra utiliser la suite (β_n) .
(e) Pour tout entier naturel n , déterminer $P(X_n = 1)$. On pourra utiliser la suite (α_n) .
(f) Pour tout entier naturel n , déterminer $P(X_n = 0)$.

4° Dans cette question, on se place dans le cas général où q est un entier naturel quelconque.

- (a) Pour tout entier naturel n , déterminer $P(X_n = q)$.
(b) On suppose ici $q \geq 1$ et pour tout entier naturel n , on pose $u_n = P(X_n = q - 1) + qP(X_n = q)$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique, que l'on déterminera.
En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de $P(X_n = q - 1)$.
(c) On suppose ici que $q \geq 2$. Que vaut $P(X_n = q - 2)$?
(d) Plus généralement, voyez-vous une méthode pour déterminer $P(X_n = q - k)$ pour d'autres valeurs de l'entier k ? Appliquer la méthode pour $k = 3$.

PROBLÈME II

Fonctions convexes

Dans ce problème, u désigne une fonction deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et on note f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = e^{u(x)}.$$

- 1° (a) Montrer que si u est une fonction convexe, alors f est une fonction convexe.
(b) La réciproque est-elle vraie?
2° Pour tout réel λ , on note f_λ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_\lambda(x) = f(x)e^{\lambda x}.$$

- (a) Montrer que si u est une fonction convexe, alors, pour tout nombre réel λ , la fonction f_λ est convexe.
(b) Réciproquement, montrer que si, pour tout nombre réel λ , la fonction f_λ est convexe, alors u est une fonction convexe.

PROBLÈME III

Polynômes de Lagrange

Soit n un entier naturel non nul.

On considère n points du plan : M_1 de coordonnées (a_1, b_1) , M_2 de coordonnées (a_2, b_2) , ..., M_n de coordonnées (a_n, b_n) .

On suppose que les abscisses a_1, a_2, \dots, a_n sont deux à deux distinctes.

Le but de ce problème est la recherche d'une fonction polynôme de degré au plus $n - 1$ dont la courbe représentative passe par M_1, M_2, \dots, M_n .

1° Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On considère donc les réels a_1, a_2, b_1, b_2 (a_1 et a_2 étant distincts). Pour tout réel x , on pose $R(x) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2$.

(a) Résoudre l'équation $R(x) = 0$, d'inconnue x .

(b) Donner la forme factorisée de $R(x)$.

(c) Calculer $R'(a_1)$ et $R'(a_2)$.

(d) Pour tout x réel, on pose $K_1(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} b_1$.

Calculer $K_1(a_1)$ et $K_1(a_2)$.

(e) Construire de même une fonction affine K_2 telle que $K_2(a_1) = 0$ et $K_2(a_2) = b_2$.

(f) Construire enfin une fonction affine F telle que $F(a_1) = b_1$ et $F(a_2) = b_2$.

2° Dans cette question, on suppose que $n = 3$. On considère donc les réels $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, et on suppose que a_1, a_2 et a_3 sont deux à deux distincts.

Pour tout réel x , on pose $S(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$.

(a) Soit u, v, w trois fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Calculer la fonction dérivée du produit uvw .

(b) En déduire, pour tout réel x , une expression de $S'(x)$.

(c) Calculer $S'(a_1), S'(a_2)$ et $S'(a_3)$.

(d) Pour tout réel x , on pose

$$L_1(x) = \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{S'(a_1)} b_1.$$

Calculer $L_1(a_1), L_1(a_2)$ et $L_1(a_3)$.

(e) Construire une fonction polynôme G de degré au plus 2 telle que $G(a_1) = b_1, G(a_2) = b_2, G(a_3) = b_3$.

On admet que si une fonction polynôme de degré au plus $n - 1$ s'annule en n réels distincts, alors tous ses coefficients sont nuls. En déduire que la fonction polynôme G est unique.

(f) On considère le système d'équations d'inconnues x, y, z :

$$x + a_1 y + (a_1)^2 z = b_1$$

$$x + a_2 y + (a_2)^2 z = b_2$$

$$x + a_3 y + (a_3)^2 z = b_3$$

Montrer que ce système admet un unique triplet (x, y, z) solution, et expliciter sa solution en fonction de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

3° (a) Dans cette question, n est un entier naturel non nul. On considère des réels $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ et on suppose que les réels a_1, a_2, \dots, a_n sont deux à deux distincts.

Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme de degré au plus $n - 1$ dont la courbe représentative passe par les points M_1, M_2, \dots, M_n définis au début de ce problème.

(b) En utilisant la question précédente, résoudre le système d'équations d'inconnues x, y, z, t :

$$x + y + z + t = 0$$

$$x + 2y + 4z + 8t = 0$$

$$x + 3y + 9z + 27t = 0$$

$$x + 4y + 16z + 64t = 1$$