Exercice 1.1

On cherche le nombre n.
On note u le chiffre des unités, d le chiffre des dizaines et c le chiffre des centaines.
On a donc $n \leqslant 999$

$u \leqslant 9$ et $u \in \mathbb{N}$
$d \leqslant 9$ et $d \in \mathbb{N}$
$c \leqslant 9$ et $c \in \mathbb{N}^*$

n est un nombre impair donc son chiffre des unités est impair.
u peut donc prendre les valeurs suivantes $1;3;5;7;9$

c est le produit de d par u
$\Rightarrow c = d \times u$
et $d \times u \leqslant 9$

les trois chiffres sont distincts donc aucun ne peut être égal à 0 puisque le produit d'un facteur nul est toujours nul
$u \neq d \neq c \neq 0$
comme ils sont distincts, aucun ne peut être égal à 1 puisque le produit d'un nombre par 1 est égal à lui-même
$u \neq d \neq c \neq 1$

on en déduit que $d \geqslant 2$
or $d \times u \leqslant 9$
donc $u \leqslant 4$

cependant u est impair et $u \neq 1$ donc $\boxed{u = 3}$

d'où $3d \leqslant 9$ donc
cette inéquation possède 3 solutions
$d = 1$ ou $d = 2$ ou $d = 3$

or si $d = 1 \Rightarrow u = c$ (impossible)
or si $d = 3 \Rightarrow u = d$ (impossible)

donc $\boxed{d = 2}$

<u>Conclusion</u> $\left.\begin{array}{l} u = 3 \\ d = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow c = d \times u \Leftrightarrow \boxed{c = 6}$

On a donc $\boxed{n = 623}$

Le nombre n est donc 623.

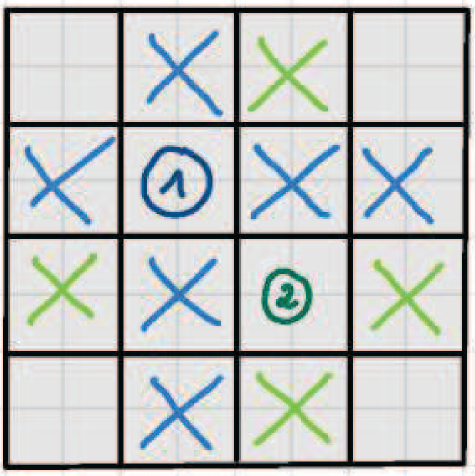
Exercice 1.2

On estime être dans une situation d'équiprobabilité.
Toutes les issues de l'univers, c'est à dire tous les positionnements possibles des 3 pièces, ont la même probabilité d'être obtenues.
La loi des probabilités est donc équirépartie.

Soit A l'événement « Il n'y a pas deux pièces dans la même ligne ni dans la même colonne »

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

On note B « Il y a une seule pièce par ligne et par colonne. »



- la $1^{ère}$ pièce peut occuper n'importe quelle case
  Son univers est constitué de 16 positions

Comme il ne peut y avoir plus d'une pièce par ligne et par colonne, 6 cases sont condamnées (X)

- la 2^{e} pièce peut occuper toutes les cases sauf celle du jeton 1 et celles condamnées par le jeton 1
  Son univers est constitué de $16 - 1 - 6 = 9$ positions

Comme il ne peut y avoir plus d'une case par ligne et par colonne, 4 nouvelles cases sont condamnées. (X)

- la 3e pièce peut occuper toutes les cases sauf celles occupées par les jetons 1 et 2 et celles qui sont condamnées à cause des jetons 1 et 2
Son univers est donc constitué de $16 - 1 - 6 - 1 - 4 = 4$ positions

Ainsi le nombre d'issues favorables à B est
$$N(B) = 16 \times 9 \times 4$$
$$= 576$$

On calcule désormais le nombre total d'issues possibles
. la 1ère pièce peut occuper toutes les cases donc elle a 16 positions possibles
. la 2e pièce peut occuper toutes les cases sauf celle occupée par la pièce 1, elle a donc 15 positions possibles
. la 3e pièce peut occuper toutes les cases sauf celles occupées par les pièces 1 et 2, elle a donc 14 positions possibles

Ainsi le nombre total d'issues est égal à
$$n_{total} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$$

Deux cas s'offrent à nous

① A signifie que chaque pièce est dans une ligne et une colonne différente des autres
$$\Rightarrow A = B$$

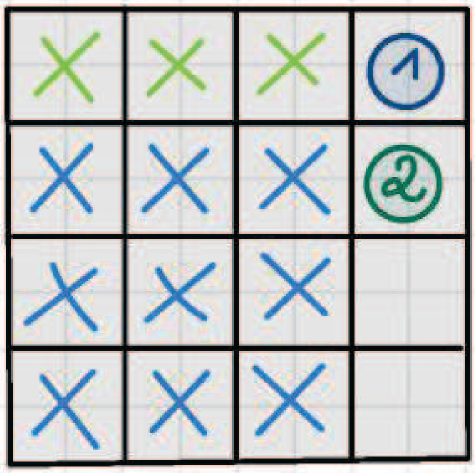
② A signifie que deux pièces ne sont pas dans la même ligne
$\Rightarrow A = B + C$ avec C « les 3 pièces sont dans la même ligne ou dans la même colonne »

CAS ①

$$P(A) = \frac{N(B)}{n\ total} = \frac{576}{3360} = \frac{6}{35} \simeq 0,171 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

CAS 2

Il faut donc calculer le nombre d'issues réalisant C



- la $1^{\text{ère}}$ pièce a 16 positions possibles
- la 2^{e} pièce a 6 positions possibles
- la 3^{e} pièce n'a plus que 2 positions possibles

Donc le nombre d'issues réalisant C est

$$N(C) = 16 \times 6 \times 2$$
$$= 192$$

Ainsi $P(A) = \dfrac{N(B)+N(C)}{n_{total}} = \dfrac{576+192}{3360} = \dfrac{8}{35} \simeq 0{,}229$ à 10^{-3} près

<u>Conclusion</u>

. si A signifie qu'au maximum il y a une pièce par ligne et par colonne

$$\boxed{P(A) = \frac{6}{35}}$$

. si A signifie qu'il ne peut y avoir deux pièces dans la même ligne mais qu'il peut y en avoir 3

$$\boxed{P(A) = \frac{8}{35}}$$

Exercice 1.3

1) $f(x) = b \iff 2x - 4 = b$
c'est un polynôme du 1er degré qui n'admet qu'une solution donc b a un unique antécédent par la fonction f tel $2a - 4 = b$ et $\boxed{b = 2a - 4}$

2) $b = 2a - 4 \iff a = \dfrac{b+4}{2}$

$\iff a = \dfrac{1}{2}b + 2$ d'où $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2}$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) \\ &= 2\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) - 4 \\ &= x + 4 - 4 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x - 4) \\ &= \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 \\ &= x - 2 + 2 \\ &= x \end{aligned}$$

3) $f(h(g(x)) = 2x^2 + 16x + 26$

$\iff f\left(h\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right)\right) = 2x^2 + 16x + 26$

$\iff 2\left(h\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right)\right) - 4 = 2x^2 + 16x + 26$

$\iff 2 \times \left(h\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right)\right) = 2x^2 + 16x + 30$

$\iff h\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) = x^2 + 8x + 15$

on a donc h est une fonction du 2^{nd} degré
d'où $h(x) = px^2 + qx + r$

on a donc $p\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2 + q\left(\frac{1}{2}x+2\right) + r = x^2+8x+15$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right) + \frac{qx}{2} + 2q + r = x^2+8x+15$$

on en déduit donc que

$$p \times \frac{x^2}{4} = x^2 \Leftrightarrow p = 4$$

$$2px + \frac{qx}{2} = 8x \Leftrightarrow 8x + \frac{qx}{2} = 8 \Leftrightarrow q = 0$$

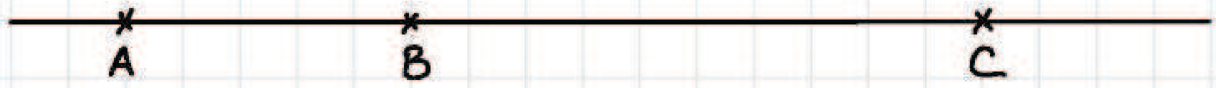
$$4p + 2q + r = 15 \Leftrightarrow 4 \times 4 + 0 + r = 15 \Leftrightarrow r = -1$$

donc l'expression de la fonction h est $\boxed{h(x) = 4x^2 - 1}$

on calcule $h(\pi) = 4\pi^2 - 1$
$\simeq 38,478$ à 10^{-3} près

Exercice 1.4

On schématise la situation



A, B et C représente l'emplacement des microphones

on note t_A, la durée pour que le son arrive au microphone A
t_B, la durée pour que le son arrive au microphone B
t_C, la durée pour que le son arrive au microphone C

d'après l'énoncé, on a $\begin{cases} t_A = t_B + \frac{1}{2} \\ t_C = t_A + 1 \iff t_C = t_B + \frac{3}{2} \end{cases}$

On connaît l'expression de la vitesse
et d'après l'énoncé $v = \frac{1}{3}$ km.s^{-1}

$\boxed{d = v \times t}$

d'où $t_A = \frac{PA}{v} = 3PA$

$t_B = \frac{PB}{v} = 3PB$

$t_C = \frac{PC}{v} = 3PC$

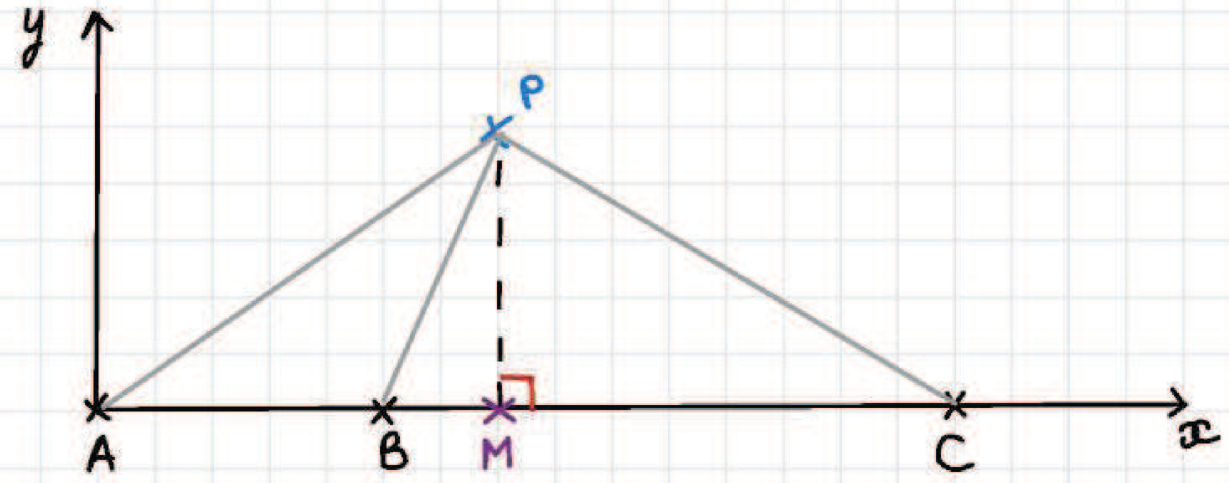
d correspond à la distance entre le microphone et l'origine du bruit

On a donc

$$3PA = 3PB + \frac{1}{2} \iff PA = PB + \frac{1}{6}$$

$$3PC = 3PB + \frac{3}{2} \iff PC = PB + \frac{1}{2}$$

On réalise le schéma de la situation dans un repère



on a $A(0;0)$; $B(1;0)$ et $C(3;0)$ et $P(x_P ; y_P)$

on souhaite que $PB < PA < PC$
donc $x_P \in [x_A ; x_C]$
cependant, il y a deux possibilités $\begin{cases} x_P \in [x_A ; x_B] \\ x_P \in [x_B ; x_C] \end{cases}$

On place M, le projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses
On obtient donc 3 triangles rectangles PAM, PBM, PMC
On peut appliquer le théorème de Pythagore

$\begin{cases} PM^2 = PC^2 - MC^2 \\ PM^2 = PB^2 - MB^2 \\ PM^2 = PA^2 - AM^2 \end{cases}$ or $MP = y_P$ et $AM = x_P$

$\Leftrightarrow \begin{cases} {y_P}^2 = (PB + \frac{1}{2})^2 - (3 - x_P)^2 \\ {y_P}^2 = PB^2 - MB^2 \\ {y_P}^2 = (PB + \frac{1}{6})^2 - {x_P}^2 \end{cases}$

or $MB = 1 - x \quad \forall x_P \in [x_A ; x_B]$
$MB = x - 1 \quad \forall x_P \in [x_B ; x_C]$
or MB est élevé au carré
et $(1 - x_P)^2 = (x_P - 1)^2$ donc nous n'avons pas besoin de discuter la position du point M par rapport à B

D'après les égalités précédentes, on a donc le système suivant

$$\begin{cases} PB^2 - (1-x_p)^2 = (PB+\frac{1}{2})^2 - (3-x_p)^2 \\ PB^2 - (1-x_p)^2 = (PB+\frac{1}{6})^2 - x_p^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PB^2 - 1 + 2x_p - x_p^2 = PB^2 + PB + \frac{1}{4} - 9 + 6x_p - x_p^2 \\ PB^2 - 1 + 2x_p - x_p^2 = PB^2 + \frac{1}{3}PB + \frac{1}{36} - x_p^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PB = \frac{31}{4} - 4x_p \\ \frac{1}{3}PB = \frac{-37}{36} + 2x_p \quad (\times 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow PB + \frac{2}{3}PB = \frac{31}{4} - \frac{37}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}PB = \frac{131}{36}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{PB = \frac{41}{12}} \simeq 3,417 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

La distance entre le microphone B et le point P est donc de $\frac{41}{12}$ km soit environ 3,417 km (avec une précision au millième)

Exercice 1.5 Question 1)

Premièrement, on souhaite démontrer que PQRS est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

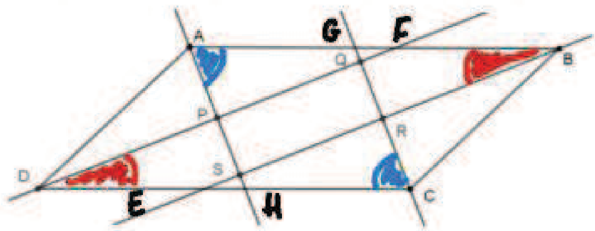
(DP) bissectrice de $\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ADP} + \widehat{PDC}$ et $\widehat{ADP} = \widehat{PDC}$

d'où $\widehat{ADC} = 2\widehat{PDC}$

(BR) bissectrice de $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABR} + \widehat{RBC}$ et $\widehat{ABR} = \widehat{RBC}$

d'où $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABR}$

donc $\widehat{PDC} = \widehat{ABR}$ et $(AB) // (DC)$



On note F l'intersection de (AB) et (DP) ; E l'intersection de (DC) et (BR) ; G l'intersection de (AB) et (CR) et H l'intersection de (DC) et (AP)

le quadrilatère FBED a deux cotés parallèles et deux angles opposés de même mesure.
donc FBED est un parallélogramme
or les cotés opposés d'un parallélogramme sont parallèles
donc $(DP) // (BR)$

ABCD est un parallélogramme $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{BCD}$

(CR) bissectrice de $\widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BCR} + \widehat{RCD}$ et $\widehat{BCR} = \widehat{RCD}$

d'où $\widehat{BCD} = 2\widehat{RCD}$

(AP) bissectrice de $\widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAP} + \widehat{PAB}$ et $\widehat{DAP} = \widehat{PAB}$

d'où $\widehat{DAB} = 2\,\widehat{PAB}$

donc $\widehat{PAB} = \widehat{RCD}$

le quadrilatère AGCH a deux côtés parallèles et deux angles opposés de même mesure, d'où AGCH est un parallélogramme
donc $(AP) // (CR)$

Conclusion : $\left.\begin{array}{l}(DP)\parallel(BR)\\(AP)\parallel(CR)\end{array}\right\}$ => PQRS est un parallélogramme

Il suffit maintenant de démontrer qu'un des angles de PQRS est droit.

ABCD parallélogramme => deux angles consécutifs supplémentaires

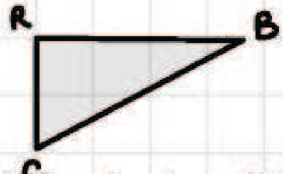
d'où $\widehat{BCD} + \widehat{ABC} = 180°$

$\iff \widehat{BCR} + \widehat{RCD} + \widehat{ABR} + \widehat{RBC} = 180°$

or $\left\{\begin{array}{l}(CR) \text{ bissectrice de } \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCR} = \widehat{RCD}\\(BR) \text{ bissectrice de } \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABR} = \widehat{RBC}\end{array}\right.$

donc $2\widehat{BCR} + 2\widehat{RBC} = 180° \iff \widehat{BCR} + \widehat{CBR} = 90°$

On se place dans le triangle RBC



la somme des angles d'un triangle est de 180°

$\Rightarrow \widehat{BCR} + \widehat{CBR} + \widehat{CRB} = 180°$

or $\widehat{BCR} + \widehat{CBR} = 90°$ d'où $\widehat{CRB} = 180 - 90 = 90°$

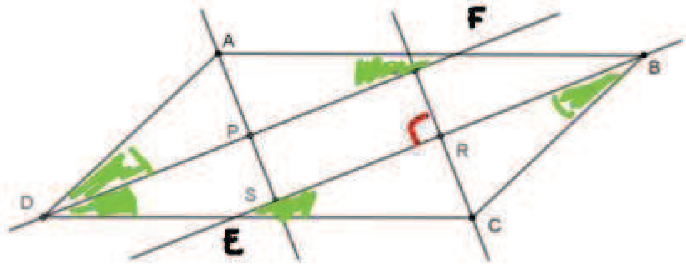
L'angle $\widehat{CRB}$ est donc droit $\Rightarrow (CR) \perp (BR)$

$\Rightarrow \widehat{SQR} = 90°$

Conclusion :

$\left.\begin{array}{l}\text{PQRS parallélogramme}\\\widehat{SQR} = 90°\end{array}\right\}$ => PQRS est un rectangle

Question 2



ABCD parallélogramme
$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

(DP) bissectrice de $\widehat{ADC}$
$\Rightarrow \widehat{PDC} = \frac{1}{2} \times \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \times \widehat{ABC}$

(BR) bissectrice de $\widehat{ABC}$
$\Rightarrow \widehat{RBC} = \frac{1}{2} \times \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \underline{\widehat{PDC} = \widehat{RBC}}$

(DP) // (SR)
$\widehat{PDC}$ et $\widehat{REC}$ angles correspondants

$\Rightarrow \underline{\widehat{PDC} = \widehat{REC}}$

PQRS rectangle $\Rightarrow (CR) \perp (BR)$
$\Rightarrow \widehat{ERC} = \widehat{CRB} = 90°$

$\widehat{RBC} = \widehat{REC}$
$\widehat{CRB} = \widehat{ERC}$
$\Rightarrow$ les triangles RCE et RCB sont semblables
or RCE et RCB partagent un côté [RC] $\Rightarrow$ RCE et RCB égaux

Donc $\boxed{BC = EC = b}$

(AB)//(DC)
(DP)//(BR)
$\Rightarrow$ FBDE parallélogramme $\Rightarrow DF = BE$
$\Rightarrow \widehat{PDE} = \widehat{RBF}$

(DF)//(BR)
$\widehat{RBF}$ et $\widehat{PFA}$ correspondants
$\Rightarrow \widehat{RBF} = \widehat{PFA} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

(DP) bissectrice de $\widehat{ADC}$ $\Rightarrow \widehat{PDC} = \widehat{ADP} = \frac{1}{2} \widehat{ADC}$
or ABCD parallélogramme $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

Donc $\widehat{ADP} = \widehat{PFA}$

$(DP) \perp (AP) \Rightarrow \widehat{APD} = \widehat{APF} = 90°$ } APD et APF sont semblables.
$\widehat{ADP} = \widehat{PFA}$

or APD et APF partagent un côté commun [AP]
$\Rightarrow$ APD et APF semblables

d'où $DP = PF$

donc $DP = \frac{1}{2} DF$

on a aussi RCE et RCB égaux $\Rightarrow ER = RB$

donc $ER = \frac{1}{2} BE$

Donc $\begin{cases} DP = \frac{1}{2} DF \text{ et } ER = \frac{1}{2} BE \\ DF = BE \end{cases} \Rightarrow DP = ER$

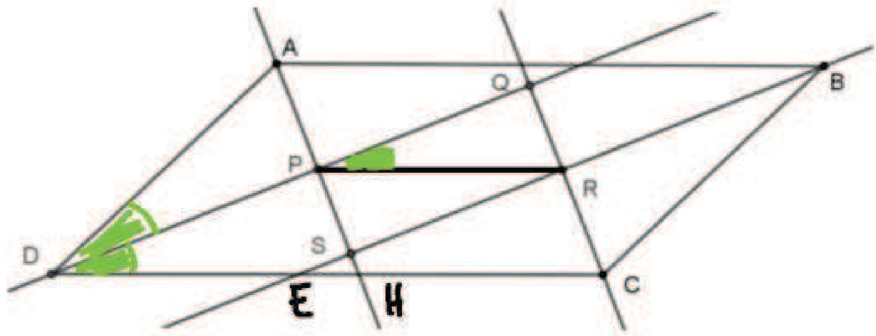
Or $\left.\begin{array}{l} DP = ER \\ (DP) // (BR) \end{array}\right\} \Rightarrow$ DPRE parallélogramme $\Rightarrow \boxed{PR = DE}$

<u>Conclusion</u> $AB = DC = a$
et $E \in [DC] \Rightarrow DC = DE + EC$

$\left.\begin{array}{l} PR = DE \\ BC = EC = b \end{array}\right\} \Rightarrow PR = DC - EC \Leftrightarrow \boxed{PR = a - b}$

Question 3

Soit $\widehat{PDC} = \beta$



On cherche à exprimer l'aire du rectangle PQRS $\mathcal{A}_{PQRS} = PQ \times QR$

DPRE parallélogramme => (DP) // (BR)
$\widehat{PDC}$ et $\widehat{QPR}$ sont des angles correspondants } => $\widehat{QPR} = \widehat{PDC} = \beta$

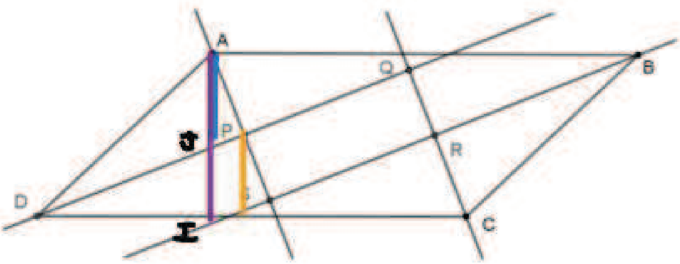
PQR est rectangle en Q, on peut donc utiliser la trigonométrie

$$\sin\beta = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{a-b} \iff QR = (a-b)\sin\beta$$

$$\cos\beta = \frac{PQ}{PR} = \frac{PQ}{a-b} \iff PQ = (a-b)\cos\beta$$

d'où $\boxed{\mathcal{A}_{PQRS} = (a-b)^2 \times \sin\beta \times \cos\beta}$

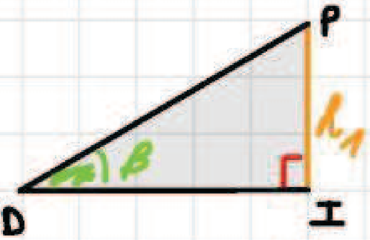
On cherche désormais à exprimer l'aire du parallélogramme ABCD



$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times h$
$= a \times h$

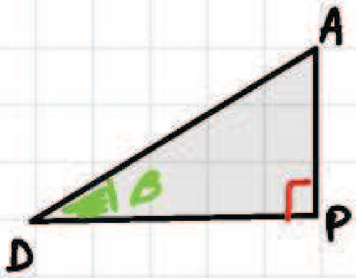
h est la hauteur du parallélogramme

$h = h_1 + h_2$



h est la hauteur du parallélogramme
donc PID est un triangle rectangle
On peut donc utiliser la trigonométrie

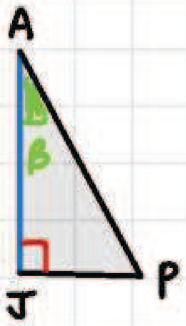
$$\sin \beta = \frac{h_1}{DP}$$



PQRS rectangle $\Rightarrow \widehat{DPA} = 90°$
On peut donc utiliser la trigonométrie

$$\cos \beta = \frac{DP}{AD} = \frac{DP}{b} \iff DP = b \times \cos \beta$$

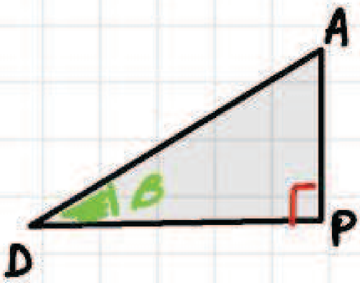
$$\left.\begin{array}{l} \sin \beta = \dfrac{h_1}{DP} \\ DP = b \times \cos \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{h_1 = b \times \cos \beta \times \sin \beta}$$



h est la hauteur du parallélogramme $\Rightarrow (AI) \perp (DC)$
or $(PR) \mathbin{//} (DC)$
d'où $(AI) \perp (PR) \Rightarrow \widehat{AJP} = 90°$
On peut donc utiliser la trigonométrie

dans le triangle DRH, rectangle en R, on a $\widehat{RHD} = 90 - \beta$
dans le triangle AIH, rectangle en I on a
$\widehat{RHD} + \widehat{AIH} + \widehat{IAH} = 180°$ et $\widehat{RHD} = 90 - \beta$
d'où $\widehat{AIH} = \beta$

$$\cos \beta = \frac{h_2}{AP}$$



$$\sin \beta = \frac{AP}{AD} = \frac{AP}{b}$$

$$\iff AP = b \times \sin \beta$$

$\cos\beta = \dfrac{h_2}{AP}$

$AP = b \times \sin\beta$

$\Rightarrow \boxed{h_2 = b \times \sin\beta \times \cos\beta}$

On a donc $h = h_1 + h_2$

$\Leftrightarrow \boxed{h = 2 \times b \times \sin\beta \times \cos\beta}$

d'où $\boxed{\mathcal{A}_{ABCD} = 2ab \times \sin\beta \times \cos\beta}$

Il nous faut désormais résoudre l'équation $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{PQRS}$

$$\mathcal{A}_{PQRS} = \mathcal{A}_{ABCD} \Leftrightarrow (a-b)^2 \cancel{\sin\beta}\cancel{\cos\beta} = 2ab \cancel{\sin\beta}\cancel{\cos\beta}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1\right] = 0$$

Or un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

on cherche le rapport $\frac{a}{b}$ donc $b \neq 0 \Leftrightarrow b^2 \neq 0$

donc $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \quad (E)$

on effectue un changement de variable $x = \frac{a}{b}$

$(E) : x^2 - 4x + 1 = 0$

c'est un polynôme du 2nd degré, on calcule le discriminant

$\Delta = 16 - 4$

$= 12 > 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Les solutions de l'équation (E) sont $x_1 = 2+\sqrt{3}$ et $x_2 = 2-\sqrt{3}$

or $a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$

or $2+\sqrt{3} \simeq 3{,}73$ et $2-\sqrt{3} \simeq 0{,}27$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\frac{a}{b} = 2+\sqrt{3}}$

L'aire du rectangle PQRS est égale à celle du parallélogramme ABCD pour un rapport $\frac{a}{b} = 2+\sqrt{3} \simeq 3{,}73$

Problème 1.6

Partie A : Somme de deux carrés

1) a. La valeur maximale de a est atteinte si $b = a_{max}$

$a_{max}^2 + b^2 = 2a_{max}^2 \iff a_{max}^2 = \frac{2018}{2}$

$\iff a_{max} = \sqrt{1009} \simeq \underbrace{31,8}$
entier naturel inférieur

Donc $\underline{a \leqslant 31}$

De plus, si $a = 32 \Rightarrow b \geqslant 32$
et $2 \times 32^2 > 2018$ impossible

b. soit a, un entier naturel pair
on peut écrire $a = 2x$ avec $x \in \mathbb{N}$
soit b, un entier naturel pair
on peut écrire $a = 2y$ avec $y \in \mathbb{N}$

$a^2 + b^2 = (2x)^2 + (2y)^2$
$= 4x^2 + 4y^2$
$= 4(x^2+y^2)$

on pose $k = x^2 + y^2$ on a donc $\boxed{a^2 + b^2 = 4k}$

Avec a et b pairs, $a^2 + b^2$ est un multiple de 4

c. a et b ne sont pas de la même parité
posons par exemple $a = 2x$ et $b = 2y + 1$ avec x et $y \in \mathbb{N}$

$a^2 + b^2 = (2x)^2 + (2y+1)^2$
$= 4x^2 + 4y^2 + 4y + 1$
$= 4(x^2 + y^2 + y) + 1$ on pose $l = x^2 + y^2 + y$

$a^2 + b^2 = 4l + 1 \Rightarrow$ impair

si a et b sont de parités différentes $\Rightarrow a^2+b^2$ est impair
or 2018 est pair
donc a et b ne peuvent pas être de parités différentes
on a vu précédemment :
si a et b pairs $\Rightarrow a^2+b^2 = 4(x^2+y^2)$
or 2018 n'est pas un multiple de 4 : $\frac{2018}{4} = 504,5$
a et b ne peuvent donc pas être pairs.

on essaye donc avec a et b impairs
soit a, un entier naturel impair
on peut écrire $a = 2x+1$ avec $x \in \mathbb{N}$
soit b, un entier naturel impair
on peut écrire $b = 2y+1$ avec $y \in \mathbb{N}$

$$a^2+b^2 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2$$

$$= 4x^2+4x+1+4y^2+4y+1$$
$$= 2(2x^2+2x+2y^2+2y+1)$$

or 2018 est bien un multiple de 2
On peut donc déduire que les nombres $\boxed{\text{a et b sont impairs}}$

d. On note un nombre impair $10d+u$ avec d le nombre des dizaines et u le chiffre des unités
On exprime le carré d'un nombre impair.

$$(10d+u)^2 = \underbrace{100d^2 + 20du}_{>10} + u^2$$

le chiffre des unités du carré d'un nombre impair est conditionné uniquement par le carré du chiffre des unités du nombre impair.

s'il se termine par 1 , son carré a pour chiffre des unités 1
3 9
5 5
7 9
9 1

Or 2018 (somme du carré de deux nombre impairs) a pour chiffre des unités 8.
si le carré de a se termine par 1, il faudrait que le carré de b ait pour unités 7 ce qui impossible pour le carré d'un nombre impair

↳ même raisonnement si le carré de a se termine par 9

si le carré de a se termine par 5, il faudrait que le carré de b ait pour unités 3 ce qui est impossible pour le carré d'un nombre

Donc le chiffre des unités de a ne peut être égal ni à 1, ni à 5, ni à 9.
Le chiffre des unités de a est donc 3 ou 7

2) On écrit tous les entiers a tel que $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \leqslant 31 \\ \text{chiffre des unités de a 3 ou 7} \end{cases}$

On calcule ensuite b^2 et on cherche à savoir s'ils s'agit d'un carré parfait

$a = 3$ $\quad 2018 - 3^2 = 2009$ or $\sqrt{2009} \simeq 44,8 \notin \mathbb{N}$ impossible

$a = 7$ $\quad 2018 - 7^2 = 1969$ or $\sqrt{1969} \simeq 44,4 \notin \mathbb{N}$ impossible

$\boxed{a = 13}$ $\quad 2018 - 13^2 = 1849$ or $\sqrt{1849} = 43 \in \mathbb{N}$ $\quad \boxed{b = 43}$

$a = 17$ $\quad 2018 - 17^2 = 1729$ or $\sqrt{1729} \simeq 41,6 \notin \mathbb{N}$ impossible

$a = 23$ $\quad 2018 - 23^2 = 1489$ or $\sqrt{1489} \simeq 38,6 \notin \mathbb{N}$ impossible

$a = 27$ $\quad 2018 - 27^2 = 1289$ or $\sqrt{1289} \simeq 35,9 \notin \mathbb{N}$ impossible

il existe un unique couple $(a ; b)$ tel que $2018 = a^2 + b^2$ avec a et $b \in \mathbb{N}$

$(13 ; 43)$

Partie B : Somme de deux cubes

1) a. $N = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

d'où $N = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$4N - (a+b)^3 = 4(a+b)(a^2-ab+b^2) - (a+b)^3$$
$$= \underline{(a+b)}\left[4(a^2-ab+b^2)\right] - \underline{(a+b)}(a+b)^2$$
$$= (a+b)\left[4(a^2-ab+b^2) - (a+b)^2\right]$$
$$= (a+b)(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2)$$
$$= (a+b)(3a^2 + 3b^2 - 6ab)$$
$$= 3(a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= 3(a+b)(a-b)^2$$

b. $N = (a+b)(a^2 - ab + b)^2 \Rightarrow (a+b)$ divise N

posons $d = a+b$

$$4N - (a+b)^3 = \overset{>0}{3}\underbrace{(a+b)}_{\substack{\text{somme de deux} \\ \text{entiers naturels} \\ >0}}\underbrace{(a-b)^2}_{\text{au carré } \geq 0}$$

d'où $4N - (a+b)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 4N - d^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \underline{d^3 \leq N}$

il nous reste à vérifier la deuxième condition $d^3 \geq N$

Pour cela, étudions le signe de leur différence

$$d^3 - N = (a+b)^3 - (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= (a+b)(a+b)^2 - (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= (a+b)\left[(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2)\right]$$

$d^3 - N = (a+b)(a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2)$

$= \underbrace{3}_{>0}\underbrace{ab}_{>0}\underbrace{(a+b)}_{>0}$

car a et b $\neq 0$

d'où $d^3 - N > 0 \Leftrightarrow d^3 \geqslant N$

donc il existe un diviseur $d = a+b$ qui divise N tel que

$N \leqslant d^3 \leqslant 4N$

c. on décompose N en produit de facteurs premiers
or 1009 est premier

$\Rightarrow \quad 2018 = 2 \times 1009$

2 et 1009 sont les seuls diviseurs de 2018, avec 2018 lui-même

si 2018 peut s'écrire sous la forme $a^3 + b^3$
alors au moins un de ses diviseurs doit vérifier $N \leqslant d^3 \leqslant 4N$
or $2^3 < 2018$ impossible
$1009^3 > 4 \times 2018$ impossible
Donc il n'existe pas d'écriture telle $2018 = a^3 + b^3$ avec a et b entiers naturels.

2) a. Pour vérifier cela, on s'assure que le résultat de $\frac{62558}{2018}$ est un entier naturel

$\frac{62\,558}{2018} = 31 \in \mathbb{N}$ donc N est un multiple de 2018

b. $N = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \underbrace{2 \times 31 \times 1009}_{\text{décomposition de N en produit de facteurs premiers}}$

N possède plusieurs diviseurs : 2 ; 31 ; 62 ; 1009 ; 2018 ; 4036 ; 31 279
On cherche lequel de ces diviseurs vérifie $N \leqslant d^3 \leqslant 4N$

$2^3 < 62\,558$ impossible
$31^3 < 62\,558$ impossible

on a bien $62\,558 < 62^3 < 4 \times 62\,558$
donc 62 est un diviseur de 62 558 qui répond à l'inégalité
$N \leqslant d^3 \leqslant 4N$

Donc $a+b = 62$ et $a^2 - ab + b^2 = 1009$

c. $d = a + b$ et $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 62\,558$

$$\begin{cases} a + b = 62 \\ 62(a^2 - ab + b^2) = 62\,558 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 62 - b \\ a^2 - ab + b^2 = 1009 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 62 - b \\ (62-b)^2 - (62-b)b + b^2 = 1009 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 62 - b \\ 62^2 - 124b + b^2 - 62b + b^2 + b^2 = 1009 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 62 - b \\ 3b^2 - 186b + 2835 = 0 \end{cases}$$

soit $P(b) = 3b^2 - 186b + 2835 = 0$

on résoud cette équation du 2^{nd} degré

$\Delta = 576 = 24^2 > 0$

cette équation admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{186 - 24}{6} = 27 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{186 + 24}{6} = 35$$

donc $a = 35$ et $b = 27$ ou $a = 27$ et $b = 35$

Il existe donc deux couples $(35 ; 27)$ et $(27 ; 35)$ tel que $a^3 + b^3 = 62\,558$

2)

```
N ← 1
A ← 2018
Pour i allant de 1 à 62559
N ← N+1
Si A³ ⩾ N
Si A³ ⩽ 4N
R ← N
Fin Si
Fin Si
Si R = 62558
Afficher "62 558 est le plus petit multiple qui peut s'écrire a³+b³"
Sinon
```

Afficher R
Fin Si
Fin Pour