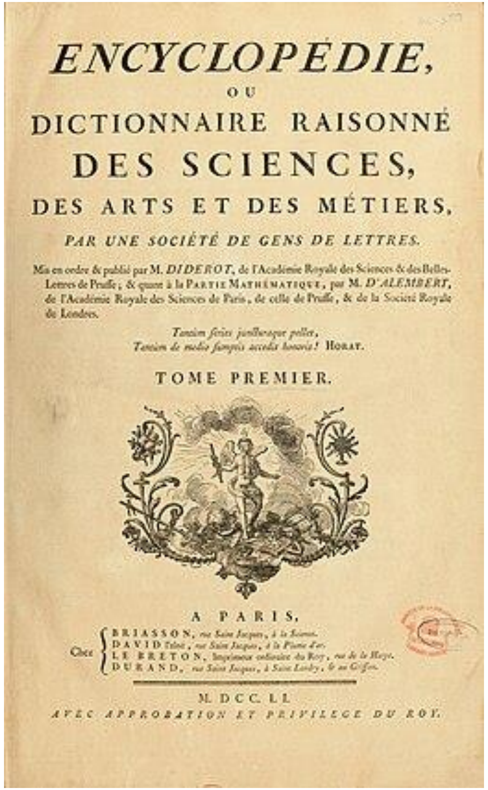
Bijections

Une brève histoire
de l’infini

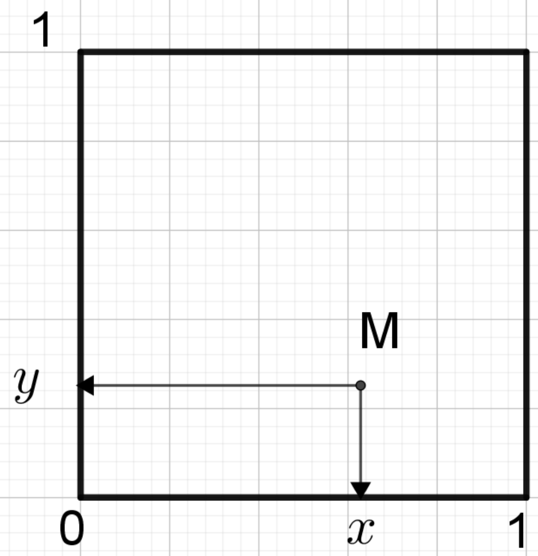
Précisions sur les nombres
(avant-propos)

M. Newton définit plus précisément le *nombre*, non pas une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité ; d'après cette idée, il divise les *nombres* en trois espèces, savoir, *nombres* entiers, c'est-à dire, qui contiennent l'unité ou certain nombre de fois exactement & sans reste, comme 2, 3, 4, *&c. nombres* rompus ou fractions (*voyez* FRACTION.), & *nombres* sourds ou incommensurables, *voyez* INCOMMENSURABLE. *V.* SOURDS *& la suite de cet article*.



Cet exposé évoque l'époque de Cantor (1845-1918) : toute suite de chiffres coupée ou non par une virgule définit un nombre réel (on n'autorise qu'un seul zéro à gauche, suivi de la virgule, et on interdit les suites illimitées de 9)

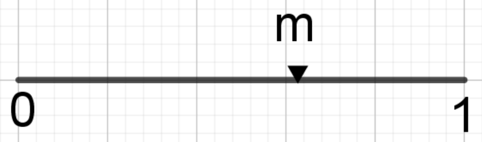
Ce qu’a vu Georg Cantor



m = 0, 62359871002365...

$$x = 0,6397026\ldots$$

$$y = 0,2581035\ldots$$



“ Je le vois, mais je ne le crois pas.”

G. Cantor (1877)

Au début, l'infini était interdit

Les Anciens : Aristote distingue l'infini potentiel de l'infini en acte. Zénon d'Elée rejette la « division à l'infini ».

Des théologiens reprennent cette distinction, qui s'accorde avec la proclamation que seul le dieu unique peut être « infini »

… et le problème de l'**éternité du monde ?**

Un infini mathématique?

Euclide : Le point est ce dont la partie est nulle (*définition*)

Conduire une droite d'un point quelconque à un autre point quelconque. Prolonger indéfiniment une droite finie (*demandes)*

Le tout est plus grand que la partie (*Notions premières*)

Remarques :

La droite n'est pas considérée comme *constituée de points*, a fortiori elle n'est pas un *ensemble infini de points*, comme on dira plus tard.

La droite (AB) est la ligne droite qui passe par les points A et B. Une droite est illimitée de chaque côté..

(Jeuxmaths.fr)

Peut-être ferait-on mieux de ne point définir la ligne *courbe* ni la ligne droite, par la difficulté et peut-être l'impossibilité de réduire ces mots à une idée plus élémentaire que celle qu'ils présentent d'eux-mêmes.

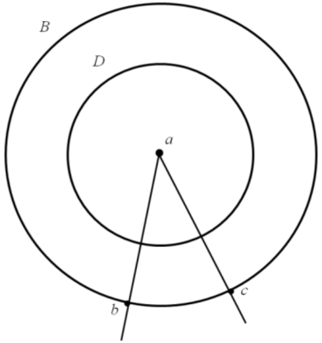
(D'Alembert)

Quelques percées dans l'infini

Robert Grosseteste
1175 - 1253

« Il y a des infinis plus petits que d'autres »

John Duns Scot
1266 - 1308



Nicole Oresme
1320 - 1382

La série [harmonique]() diverge

Galilée
1564 - 1642

Il y a exactement autant de carrés parfaits que d'entiers

La divergence de la série harmonique selon Nicole Oresme (1320-1382)

On appelle série harmonique la suite définie par son premier terme 1 et la relation de récurrence : Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

En utilisant des … on écrit :$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$

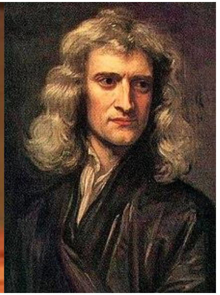
Idée de Nicole Oresme, dans Questiones super geometriam euclidis (fragments retrouvés dans les années 1950 dans les caves de la bibliothèque du Vatican) : faire des paquets de 1, 2, 4, 8, 16, etc. termes consécutifs :

$$u_{n+\cdots} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) +$$

…. Pour dépasser une somme donnée *S* , il suffit d'additionner *S-1* paquets. Tout nombre entier donné peut être dépassé.

Les infiniment petits s’y mettent

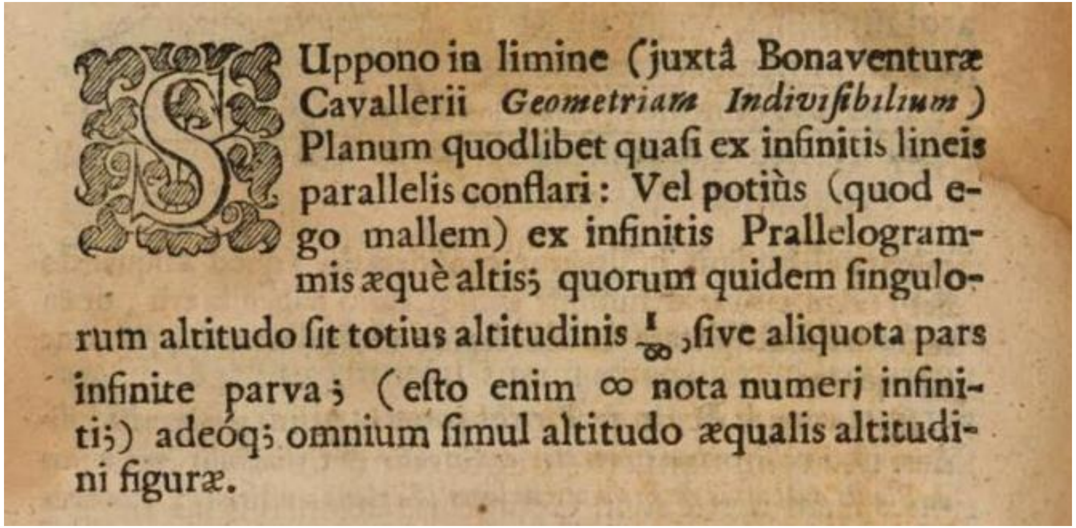
John Wallis (1616 – 1703)



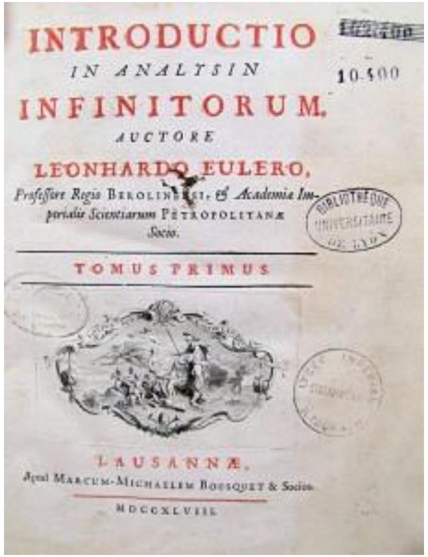
Isaac Newton (1643 – 1727)

G. W. Leibniz (1646 – 1716)

Leonhard Euler (1707 – 1783)



SUppono in limine (juxtâ Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indivisibilium*) Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva; (esto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium simul altitudo æqualis altitudini figuræ.



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* Petropolitanæ *Socio.*
TOMUS PRIMUS
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII

La droite fourre-tout

La commensurabilité, paradigme grec : les nombres sont des rapports (entiers ou rapports d'entiers)

Mais il existe des **irrationnels** ($\sqrt{2}$)

On peut placer « les nombres » **sur une droite**

Les négatifs, les irrationnels, les solutions d'équations polynômiales, et même les *transcendants* **sont des nombres**, ils ont leur place sur la droite aussi.

La cardinalité

Les **nombres entiers** retrouvent leur destination originelle (*adjectifs numéraux cardinaux*)

Mais ils s’effacent devant la propriété **avoir même cardinal**, qui s’applique à deux **ensembles** qui peuvent être mis en **correspondance** terme à terme.

L’équipotence concerne aussi les ensembles **infinis.**

Quelques correspondances

Entre N et certaines de ses parties strictes

$$n \mapsto 2n$$

$$n \longmapsto n^2$$

L'hôtel de Hilbert

Entre N et des ensembles dont il est une partie stricte

Autres ensembles dénombrables : Q, l'ensemble des nombres algébriques

Le procédé diagonal

0	0, 35678016901…
1	0, 56821349721…
2	0, 23598712450…
3	0, 69888742102…
4	0, 54123002897…
5	0, 12365489711…
…	

Supposons qu'il existe une correspondance terme à terme qui associe à tout nombre réel un entier. Le tableau ci-contre montre ce qui pourrait être pour les premiers entiers.

Considérons un nombre réel dont la première décimale n'est pas 3, la seconde n'est pas 6, etc. Ce nombre ne peut donc être associé ni à 0, ni à 1, etc. Aucun entier ne lui correspond. **N** et **R** ne sont pas équipotents.

Le même procédé permet de montrer que **N** n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(\mathbf{N})$… *exercice*

A voir aussi : il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$…

Ce qui n'a pas été dit…

Comment est fabriqué **l'ensemble des nombres réels** et pourquoi on peut associer à chacun une suite de décimales (et réciproquement).

La **théorie naïve des ensembles** (une *propriété* ***définit*** un ensemble) doit être pour le moins **consolidée**.

L'hypothèse du continu

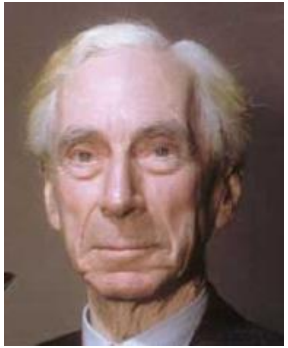
Le calcul sur les **nombres ordinaux…**

Le terme **bijection.**

Ensembles infinis : amis, ennemis

Leopold Kronecker
1823 – 1891
« Die Ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles Übrige ist Menschenwerk »

Henri Poincaré
1854 – 1912
« La théorie des ensembles [infinis] est une maladie dont les générations futures se remettront »



Bertrand Russell
1872 – 1970
« La résolution des problèmes [autour de] l'infini mathématique constitue la plus grande réussite dont notre époque puisse s'enorgueillir »

Georg Cantor (1845 – 1918)
« Dieu tout-puissant a voulu que je parvienne aux ouvertures les plus extraordinaires en théorie des ensembles et en théorie des nombres ; ou plutôt j'ai trouvé ce qui m'a troublé pendant des années et que j'ai si longtemps cherché »

« L'œuvre de Cantor est le produit le plus étonnant de la pensée mathématique et une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine de l'intelligence pure »

David Hilbert