Autres solutions pour les exercices 3 et 6 de la partie dénombrement et probabilités

Exercice 3 – Générateur d'entiers

Un générateur d'entiers produit de manière aléatoire et équiprobable un entier de 1 à 9. On utilise le générateur un certain nombre de fois puis on calcule le produit N des entiers obtenus.

1. Si le générateur est utilisé 3 fois, quelle est la probabilité que le nombre N soit un nombre premier ?

2. Si le générateur est utilisé 4 fois, quelle est la probabilité que le nombre N soit divisible par 5 mais non divisible par 7.

Autre correction du 2. de l'exercice 3

On note C l'événement : «le nombre généré est divisible par 5 si le générateur est utilisé 4 fois», et $\bar{S}$ l'événement : «le nombre généré n'est pas divisible par 7 si le générateur est utilisé 4 fois»

La probabilité recherchée est $P(C\cap\bar{S})$.

$C\cap\bar{S}$ et $\bar{C}\cap\bar{S}$ forment une partition de $\bar{S}$ donc $P(\bar{S})=P(C\cap\bar{S})+P(\bar{C}\cap\bar{S})$.

Si $\bar{S}$ est réalisé, 7 étant premier, aucun des 4 entiers générés n'est égal à 7, il y donc 9-1 soit 8 possibilités pour chacun de ces entiers, et donc $P(\bar{S})=\left(\frac{8}{9}\right)^4$.

Si $\bar{S}\cap\bar{C}$ est réalisé, 5 et 7 étant premiers, aucun des 4 entiers générés n'est égal à 5 ou 7, il y a donc 9-2 soit 7 possibilités pour chacun de ces entiers et $P(\bar{S}\cap\bar{S})=\left(\frac{7}{9}\right)^4$.

Finalement, $P(C\cap\bar{S})=P(\bar{S})-P(\bar{C}\cap\bar{S})=\left(\frac{8}{9}\right)^4-\left(\frac{7}{9}\right)^4=\frac{565}{2187}$ après simplification.

Exercice 6 – Des retournements dans les permutations

Les 2 000 fascicules d'une revue mathématique, numérotés de 1 à 2 000, constituent une pile (avec des étagères intermédiaires), le numéro 1 étant dessus, les numéros étant croissants jusqu'au numéro 2 000, tout en dessous.

Chaque fois qu'on se donne un entier n compris entre 1 et 2 000, les manipulations suivantes sont possibles :

1. Si n est impair, on prend les n premiers fascicules, sur le dessus de la pile, on en inverse l'ordre des numéros et on remet le paquet au-dessus de la pile ;
2. Si n est pair, on prend les n premiers fascicules et sans changer l'ordre, on met le paquet en dessous de la pile.

Bon, ça fait les muscles…

En utilisant ces deux manipulations, combien de permutations de l'intervalle $[\![1,2\,000]\!]$ de peut-on obtenir ?

Autre correction de l'exercice 6
Dans un premier temps on peut remarquer qu'avec l'opération 1 un numéro pair est envoyé sur un numéro pair et un numéro impair est envoyé sur un numéro impair et c'est la même chose avec l'opération 2.
Montrons qu'avec les deux opérations toutes les permutations des numéros pairs et impairs sont possibles simultanément.
On suppose que les images des entiers $1,3,5,...,1999$ sont $n_{1,}n_{3,}n_{5,}...,n_{1999}$ par une permutation des numéros impairs et que les images des entiers $2,4,6,...,2000$ sont $n_{2,}n_{4,}n_{6,}...,n_{2000}$ par une permutation des numéros impairs.
C'est-à-dire qu'après avoir effectué les deux permutations, le fascicule n_1 est placé en haut de la pile, le fascicule n_2 est juste en dessous et ainsi de suite jusqu'au fascicule n_{2000}.
Voici un algorithme permettant d'obtenir simultanément ces deux permutations à l'aide des opérations 1 et 2.

Etape 1
Si il n'y est pas déjà, on met n_{2000} en position 2000 avec l'opération 2 en mettant tous les premiers fascicules jusqu'au numéro n_{2000} en bas de la pile.

Etape 2
Si n_{1999} n'est pas en position 1999 :
*On met n_{1999} en position 1 (si il n'y est pas déjà) grâce à l'opération 1 en inversant l'ordre des fascicules de celui en haut de la pile jusqu'au fascicule n_{1999} .
* On met n_{1999} en position 1999 en inversant l'ordre des fascicules de n_{1999} en haut de la pile au fascicule placé en position 1999 (c'est-à-dire l'avant dernier de la pile) avec l'opération 1.
On obtient ainsi en bas de la pile n_{1999} et n_{2000}.

Etape 3
Si n_{1998} n'est pas en position 1998 :
*On met n_{1998} en position 2 grâce à l'opération 1 en inversant l'ordre des fascicules de celui en haut de la pile à $n_?$ celui placé après le fascicule n_{1998} .
*On met n_{1999} et n_{2000} en haut de la pile en mettant les 1998 premiers fascicules en bas de la pile avec l'opération 2 :
On a ainsi en haut de la pile dans cet ordre n_{1999}, n_{2000}, $n_?$ et n_{1998} .
* On échange les trois premiers fascicules de la pile avec l'opération 1 :
On obtient dans cet ordre en haut de la pile $n_?$, n_{2000}, n_{1999}, n_{1998} et $n_{??}$.
* On échange les cinq premiers fascicules de la pile avec l'opération 1 :
On obtient dans cet ordre en haut de la pile $n_{??}$, n_{1998}, n_{1999}, n_{2000} et $n_?$.
* On met les quatre premiers fascicules en bas de la pile grâce à l'opération 2 :
En bas de la pile on retrouve $n_{??}$, n_{1998}, n_{1999} et n_{2000}.

Etape 4
On effectue le même procédé qu'à l'étape 2 pour mettre n_{1997} en 1997 en position 1997.

Etape 5
On effectue un procédé similaire à celui de l'étape 3 pour mettre n_{1996} en position 1996.

Puis on réitère ces étapes jusqu'à obtenir la permutation souhaitée.
Il y a 1000! façons de permuter les numéros impairs et 1000! façons de permuter les numéros pairs.
Il y a donc en tout $(1000\,!)^2$ permutations possibles en effectuant les deux opérations.