Olympiades nationales de mathématiques 2022

Asie - Pacifique

L’épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l’épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d’exposer le bilan des initiatives qu’ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l’épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l’enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Supercarrés

Les carrés des entiers naturels sont appelés carrés parfaits. Par exemple 1, 4, 9 et 144 sont des carrés parfaits ; 3, 8 et 15 n'en sont pas.

1. Donner la liste des carrés des vingt premiers entiers naturels non nuls.

Un supercarré d'ordre 2 est un couple de deux entiers naturels (x_1 , x_2) tel que :
1) x_1 est impair ;
2) $x_1 < x_2$;
3) $x_1^2 + x_2^2$ est un carré parfait.

2. ***a.*** Justifier que $(7 , 24)$ est un supercarré d'ordre 2.

b. Expliquer pourquoi $(3 , 4)$ est le seul supercarré d'ordre 2 commençant par 3.

c. Trouver les deux entiers naturels notés *a* et *b* tels que $(5 , a)$ et $(13 , b)$ soient deux supercarrés d'ordre 2. Expliquer la méthode utilisée pour obtenir *a*.

d. Quelle application géométrique peuvent avoir les supercarrés d'ordre 2 ?

Un supercarré d'ordre n est une suite de n entiers naturels $(x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_{n-1} , x_n)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $n \geq 2$;

2) x_1 est impair ;

3) $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$;

4) Pour tout entier k variant de 1 à n, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_k^2$ est un carré parfait

3. Vérifier que $(5 , 12 , 84)$ est un supercarré d'ordre 3.

4. Déterminer un supercarré d'ordre 5 commençant par 3.

5. Trouver une valeur de x_1 telle que $(x_1 , x_2 , x_3 , 48\,984)$ soit un supercarré.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Alternances

1. Pierre répartit les entiers naturels compris entre 1 et $1\,000$ en deux sous-ensembles disjoints, de sorte que les sommes des éléments de l'un et l'autre sous-ensemble soient égales.

- ***a.*** Prouver que la répartition $\begin{cases} A = \{1, 3, 5, \dots 499, 502{,}504, 506, \dots, 996, 998, 1000\} \\ B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 498, 500, 501, 503, 505, \dots, 997, 999\} \end{cases}$, où A a pour éléments tous les nombres impairs inférieurs ou égaux à 499 et tous les nombres pairs supérieurs ou égaux à 500 et B tous les autres nombres inférieurs ou égaux à 1 000, répond à la définition.

- ***b.*** Donner un exemple de répartition pour lequel on trouve – entre autres – plus de 700 entiers consécutifs dans un des deux sous-ensembles construits.

2. Sans même regarder la répartition choisie par Pierre, Clara affirme alors : « On peut éliminer deux nombres de chaque sous-ensemble et faire en sorte que les sommes des éléments restants soient égales. »
Lorsque deux entiers consécutifs ne sont pas dans le même sous-ensemble, on dit que l'on a une *alternance*.

- ***a.*** Prouver que si l'on a au moins quatre alternances, Clara a raison.

- ***b.*** Prouver que si l'on a exactement trois alternances, Clara a raison.

- ***c.*** Prouver que si l'on a exactement deux alternances, Clara a raison.

- ***d.*** Prouver que Clara a toujours raison.

3. Pierre répartit cette fois les entiers naturels compris entre 1 et 20 en deux sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales.
Sans même regarder la répartition choisie par Pierre, Clara affirme alors que l'on peut éliminer deux nombres de chaque sous-ensemble de sorte que dans chaque sous-ensemble les sommes respectives des éléments restants soient égales.
Prouver que, cette fois, Clara aurait mieux fait de regarder avant de parler.

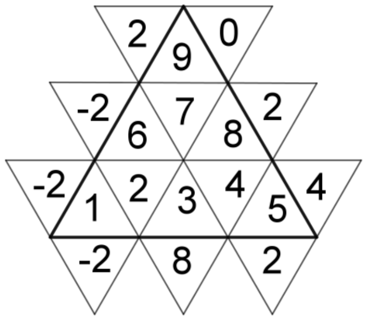
Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Les triangles magiques de Dirichlet

Soit n un entier naturel non nul. Un triangle de Dirichlet de taille n est un triangle équilatéral découpé en petits triangles équilatéraux intérieurs, chaque côté du grand triangle supportant n petits triangles intérieurs, ainsi que n petits triangles extérieurs.

Dans chaque petit triangle, intérieur ou extérieur, est inscrit un nombre réel, respectivement désigné par *nombre intérieur* ou *nombre extérieur*.

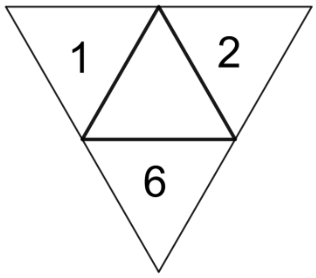
Ci-contre figure un exemple de triangle de Dirichlet de taille 3 :



Un triangle de Dirichlet sera dit *magique* si chaque nombre intérieur est la moyenne arithmétique des nombres figurant dans les trois triangles voisins (partageant un côté commun, intérieur ou extérieur).

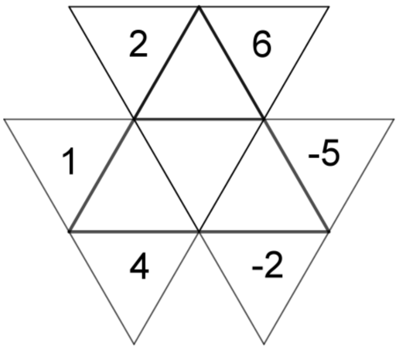
On souhaite compléter des triangles de Dirichlet dont les nombres extérieurs sont fournis, dans le but d'obtenir un triangle magique.

1. Compléter ce triangle de Dirichlet de taille 1 pour le rendre magique.



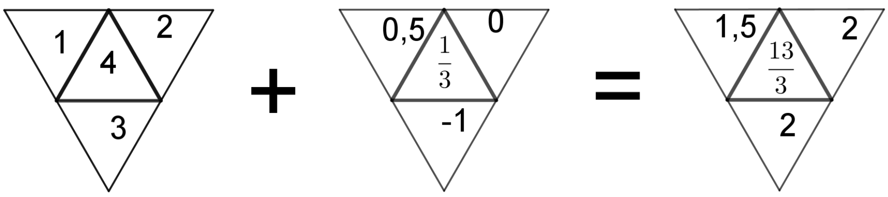
2. ***a.*** Justifier que le nombre intérieur central d'un triangle de magique de Dirichlet de taille 2 est nécessairement la moyenne arithmétique des six nombres extérieurs.

b. En déduire qu'étant donné les nombres extérieurs d'un triangle de Dirichlet de taille 2, il existe une unique façon de le compléter pour qu'il soit magique.



c. Compléter le triangle de Dirichlet de gauche pour le rendre magique.

3. On définit la somme de deux triangles de Dirichlet de même taille n comme le triangle de Dirichlet de taille n dont les nombres sont obtenus en additionnant terme à terme les nombres situés aux mêmes positions. Par exemple :



Montrer que la somme de deux triangles magiques de Dirichlet de taille 1 est magique.