MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Un espace de cartes

On dispose de cartes. Sur chaque carte est inscrit un nombre de trois chiffres noté *abc*.
Le chiffre *a* peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3.
Le chiffre *b* peut prendre les valeurs 4, 5 ou 6.
Le chiffre *c* peut prendre les valeurs 7, 8 ou 9.
On note par exemple $[249]$ la carte pour laquelle a vaut 2, b vaut 4 et c vaut 9.
Deux cartes quelconques ne peuvent porter le même nombre.

1. Quel est le nombre maximal de telles cartes que l'on peut avoir ?
On appellera *jeu* cet ensemble de cartes.

2. *Où on fabrique des droites*
On considère deux cartes distinctes du jeu appelées M et N.
a. Montrer qu'il existe dans le jeu une troisième carte, P, pour laquelle les chiffres de même position des trois cartes M, N et P sont tous différents ou tous identiques.
On dit alors que les cartes M, N et P sont *alignées* et on dit que la carte P appartient à la *droite* (MN).
b. Quel autre point trouve-t-on sur la droite définie par les cartes $[147]$ et $[258]$? Sur la droite définie par les cartes $[159]$ et $[258]$?
c. La carte M appartient-elle à la droite (NP) ?
d. Peut-on trouver une carte Q différente de M, N et P sur la droite (MN) ?
e. Montrer qu'il y a exactement 117 droites.

3. *On s'intéresse au parallélisme et au concours*
La droite définie par les points $[247]$ et $[347]$ est notée $([247]\ [347])$.
a. Quelle est la carte intersection des droites $([247]\ [347])$ et $([157]\ [167])$?
b. À combien de droites cette carte appartient-elle ?
c. Donner un exemple de droites sans carte commune.

4. *Un plan pour fabriquer des plans*
On considère un ensemble de trois cartes M, N et P non alignées. On dit que ces trois cartes définissent un plan noté (MNP).
L'ensemble des cartes appartenant à ce plan est défini en suivant le protocole ci-dessous.

```
Former un ensemble de cartes, noté T1, avec les trois cartes non alignées.
Former un ensemble de cartes, noté T2, avec les autres cartes du jeu.
nb_cartes_ajoutées  = 3
Tant qu'il reste des cartes dans T2 et que nb_cartes_ajoutées > 0  :
        nb_cartes_ajoutées = 0
        Pour toutes les cartes X du tas T2 :
                Si X appartient à une des droites définies par deux cartes de T1 :
                        ajouter X à T1
                        retirer X de T2
                        ajouter 1 à nb_cartes_ajoutées
Ecrire la liste des cartes obtenues
```

a. Quelles sont les cartes contenues dans le plan $([159]\ [248]\ [257])$?
b. On dit qu'une droite est contenue dans un plan lorsque l'ensemble de ses cartes appartient à ce plan.
Dresser la liste des droites contenues dans le plan ainsi construit.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

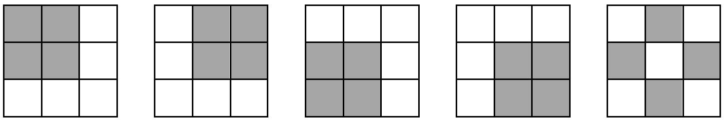
Carrés borroméens

On considère des tableaux carrés de trois lignes et trois colonnes, dont les cases contiennent chacune un des entiers compris entre 1 et 9, tous ces entiers apparaissant dans le tableau. On utilise la représentation ci-contre, chaque lettre figurant un des entiers compris entre 1 et 9.

A	*B*	*C*
D	*E*	*F*
G	*H*	*I*

Un tel tableau est appelé « carré borroméen » si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
(*) Il existe un entier S, dit *somme borroméenne,* telle que :
$A+B+D+E=B+C+E+F=D+E+G+H=E+F+H+I=S$;
(**) On a également $B+D+H+F=S$
On dit alors que ce carré borroméen est de *somme borroméenne* S.

Les nombres intervenant dans ces égalités sont situés dans les cases grisées dans les schémas ci-contre :



1. Quels sont les carrés borroméens parmi les tableaux suivants ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4	9	2
3	5	7
8	1	6

3	4	9
8	5	2
1	6	7

2. ***Premières explorations***
On considère un carré borroméen de *somme borroméenne* S.
a. Combien vaut la somme $A+B+C+D+E+F+G+H+I$?
b. En déduire que $S=15+E$.
c. Trouver un carré borroméen de somme 16.
d. Trouver un carré borroméen de somme 24.

3. ***Structure des carrés borroméens de somme*** S ***impaire***
Dans cette partie, on considère un carré borroméen de somme S impaire.
a. Montrer que dans un carré borroméen de somme S impaire, les entiers A et I sont de parités différentes.
b. Combien y a-t-il de cases occupées par un nombre pair ?
c. Si on suppose A pair, montrer que tout carré borroméen de somme S et de premier terme A possède une des structures ci-contre, où les x représentent des nombres pairs.

x	x	x
	x	

x		
x	x	
x		

d. Montrer que dans un carré où S et A sont pairs, $H=5$.
e. Compléter le carré ci-dessous, dont les contenus de quatre cases sont donnés, pour en faire un carré borroméen.

4		
	2	
	5	

4. ***Un carré borroméen de somme*** 20
a. Trouver un carré borroméen de somme 20 tel qu'aucun nombre pair ne prenne place en un sommet du carré.
b. Existe-t-il un carré borroméen de somme 20 dont au moins un nombre pair occupe un sommet du carré ?

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

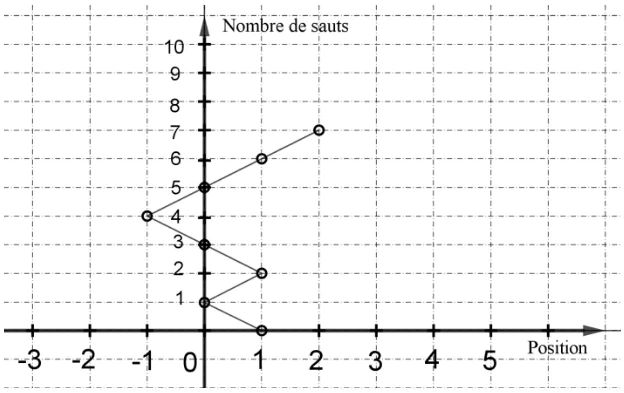
Sauts de puce

Une puce effectue n sauts de longueur 1 qui l'amènent en différents points d'abscisse entière d'un axe. Elle part du point d'abscisse a et parvient au point d'abscisse b après d sauts vers la droite et g sauts vers la gauche. L'ordre dans lequel ces sauts sont réalisés n'est pas précisé.

1. ***Étude d'un exemple***
On suppose que $a = 0$, $d = 2$ et $g = 4$.
a. Quelle est la position finale de la puce ?
b. On appelle parcours de la puce la suite des déplacements menant cette puce de sa position initiale à sa position finale.
Combien y a-t-il de parcours possibles de la puce ?
Indication : on pourra déterminer le nombre de façons de choisir 2 objets parmi 6.

2. Parmi les triplets (n, a, b) suivants, quels sont ceux correspondant à un parcours possible de la puce
a. $(5, 10, 1)$ ***b.*** $(6, 5, 3)$ ***c.*** $(11, 5, 1)$?

3. On représente le parcours de la puce au moyen d'un graphique dans lequel le point de coordonnées (x, y) est marqué si la puce a atteint le point d'abscisse x après y sauts. La figure ci-contre illustre un parcours de 7 sauts de la puce menant cette puce du point d'abscisse 1 au point d'abscisse 2.
Représenter sur un tel graphique un parcours de 7 sauts menant la puce du point d'abscisse 1 au point d'abscisse 2 sans passer par le point d'abscisse 0.



4. Dans cette question, on s'intéresse aux parcours menant la puce en 7 sauts du point d'abscisse 1 au point d'abscisse 2 ***en passant par le point d'abscisse 0 après trois déplacements*** (comme c'est le cas sur la figure ci-dessus).
a. Combien de parcours de quatre sauts sont- ils possibles une fois ce point atteint ?
b. Combien de parcours de quatre sauts seraient-ils possibles s'il s'agissait, à partir du point d'abscisse 0, d'atteindre le point d'abscisse -2 ?

5. Plus généralement, montrer que le nombre de parcours de n sauts menant la puce du point d'abscisse a au point d'abscisse b *en passant au moins une fois par le point d'abscisse 0* est le même que le nombre de parcours de n sauts menant la puce du point d'abscisse a au point d'abscisse $-b$.