Éléments de solution

Un espace de cartes

1. Il y a exactement 27 cartes, $3 \times 3 \times 3$.
2. ***a.*** Appelons dans l'ordre a, b et c les chiffres figurant sur la carte M et a', b' et c' leurs homologues sur la carte N. Si $a \neq a'$, appelons $a"$ celui des trois chiffres 1,2,3 qui n'est ni a ni a'. Faisons de même avec les chiffres des autres rangs. Si les chiffres d'un certain rang dans M et N coïncident, mettons $b = b'$, on prend $b" = b$ également. La carte P choisie obéit à ce protocole.
b. On trouve le point $[369]$ sur la première, le point $[357]$ sur la seconde.
c. Il résulte de ce qui précède que les chiffres marqués sur M sont, rang par rang, identiques à ceux marqués sur N et P, soit différents de l'un et l'autre, eux-mêmes différents, ce qui montre que la condition " M appartient à la droite (NP)" est satisfaite.
d. Le protocole mis en œuvre pour trouver P conduit à chaque étape à un choix unique : soit on prend le chiffre qui reste, soit on prend celui qui est déjà sur les deux cartes. Il n'y a pas de quatrième point sur la droite (MN).
e. On choisit une première carte, il y a 27 possibilités de le faire, puis une seconde, pour laquelle restent 26 possibilités. Au total, $27 \times 26 = 702$ couples. Ces 702 couples ne font que 351 paires mais, quand on ajoute l'unique troisième point possible, les 351 triplets produits peuvent provenir de 117 paires. D'où le résultat.

3. ***a.*** La carte $[147]$ est commune aux deux droites.
b. On peut les énumérer :
- les droites définies par deux cartes ne partageant aucun chiffre avec 147 : $([258][369])$, $([268][359])$, $([259][368])$, $([269][358])$;
- les droites définies par deux cartes partageant un chiffre avec 147 . Il y en a 6 ;
- les droites définies par deux cartes partageant deux chiffres avec 147. Il y en a 3.
Au total, cette carte est commune à 13 droites.
c. Les droites $([147][258])$ et $([168][257])$ n'ont aucune carte en commun.

4. ***a*** On obtient les 9 points suivants :
159-248-257
147-168-269-349-358-367
4. ***b***
On obtient 12 droites :
on choisit 2 points parmi 9, ce qui donne 36 couples mais alors chaque droite est comptée 3 fois d'où le résultat.
Listes des triplets de points de chacune de ces 12 droites du plan $([159]\ [248]\ [257])$:
147-159-168
147-248-349
147-257-367
147-269-358
159-248-367
159-257-358
159-269-349
168-248-358
168-257-349
168-269-367
248-257-269
349-358-367

Carrés borroméens

1. Seul le tableau de droite est un carré borroméen. Pour celui de gauche, $1 + 4 \neq 3 + 6$, pour celui du milieu, $3 + 8 \neq 7 + 6$.

2. ***a.*** La somme $A + B + C + D + E + F + G + H + I$ vaut 45.
b. Faisons la somme de tous les nombres apparaissant dans les carrés grisés ci-dessus. On obtient :

$$5S = A + C + G + I + 3(B + D + H + F) + 4E$$

Et donc $5S = 45 + 2(B + D + H + F) + 3E$, puis $3S = 45 + 3E$, d'où $S = 15 + E$.

c. L'égalité $E = 1$ conduit à : $\begin{cases} A + B + D = 15 \\ B + C + F = 15 \\ D + G + H = 15 \\ F + H + I = 15 \\ B + D + H + F = 16 \end{cases}$ d'où viennent d'abord $B + D = 15 - A$
et $B + D = 16 - (15 - I) = 1 + I$
d'où $A + I = 14$. $(A, I) = (8,6)$ conduit à $B + D = 7$ et on peut compléter un premier carré borroméen de somme 16.

8	4	9
3	1	2
5	7	6

d. Pour $E = 9$, on a les égalités $\begin{cases} A + B + D = 15 \\ B + C + F = 15 \\ D + G + H = 15 \\ F + H + I = 15 \\ B + D + H + F = 24 \end{cases}$

5	7	2
3	9	6
4	8	1

On trouve cette fois $A + I = 6$ et on voit que $B + D + H + F = 30 - (C + G)$qui conduit à $C + G = 6$ et on peut compléter un carré borroméen de somme 24
En observant que $24 = 40 - 16$ on peut aussi reprendre le carré précédent en faisant les compléments à 10 (on obtient à une rotation près le carré précédent).

2	6	1
7	9	8
5	3	4

3. ***a.*** Comme nous l'avons utilisé dans les questions précédentes, on trouve $A + I = S - 2E$. Comme S est impaire et $2E$ pair, il s'ensuit que $A + I$ est impair. Ces nombres sont de parités différentes.
b. Il y a quatre nombres pairs et cinq impairs entre 1 et 9…
c. On sait que E (voir question **2.**) et A sont pairs. Pour une somme S impaire, il s'ensuit que B et D sont de parités différentes. Si on suppose B pair, il reste un seul nombre pair à placer et la somme $B + D + H + F$ doit être réalisée avec un ou trois nombres impairs. Il y en a déjà un, D, donc les deux autres H et F sont impairs. Ce qui entraîne que C est pair (seul nombre impair dans la somme $B + C + E + F$). C'est fini, la première structure proposée est complète.
Si on suppose B impair, il est nécessaire que D soit pair et la structure se déduit de la première par rotation d'un quart de tour.
d. On suppose que dans le carré étudié, les nombres pairs sont représentés par des croix. La somme des nombres pairs est $A + B + C + E = 20$.
Comme $A + B + D + E = S$, on en déduit que $D - C + 20 = S$
De même $B + C + E + F = S$ fournit $F + 20 - A = S$

x	x	x
	x	

$B + D + H + F = S$ donne $H = S - (B + D + F) = S - (B + (S - 20 + C) + (A - 20 + S))$

Donc $H = S - (B + C + A) + 40 - 2S = E - 20 + 40 - S = 5$ (d'après la question **2 b.**)
Pour le cas où le carré aurait l'autre structure, remplacer C par G et Bpar D pour trouver le même résultat.

e. Ce carré est nécessairement de somme 17 (car $S = 15 + E$). Si on place les nombres pairs dans la situation traitée en ***d.***, on a nécessairement $B = 8$ et $C = 6$ et le contenu des autres cases s'en déduit directement.

4	8	6
3	**2**	1
7	**5**	9

4. ***a.*** La somme étant 20, on en déduit que $E = 5$ et il ne reste pour les nombres pairs que les positions médianes. Leur somme $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ convient.
On les place par exemple comme ci-contre (mais 2 ne va pas avec 8, car $2 + 5 + 8 = 15$ et le complément s'écrit directement. La disposition ci-contre convient :

9	4	3
2	**5**	8
7	6	1

b. Supposons que A soit pair (sans perdre de généralité). Comme $E = 5$, on en déduit que seul un des deux B ou D est impair. Là encore pour des raisons de symétrie on peut considérer que B est pair. La somme $B + D + H + F$ étant paire, un exactement parmi H et F est pair. Les nombres pairs se répartissent alors de l'une des deux façons ci-contre, mais celle de gauche doit être éliminée, car elle ne montre qu'un nombre impair parmi E, H, I, F .

x	x	
	5	
x	x	

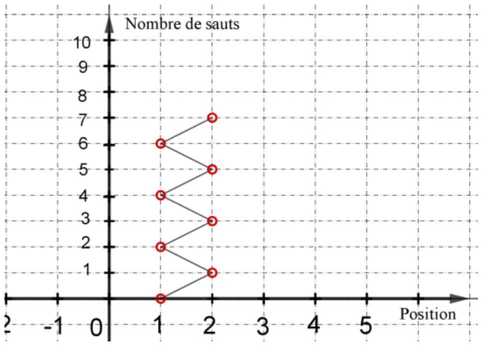
x	x	
	5	x
		x

Seule possibilité : les nombres pairs sont A, B, F et I.
Le carré composé de D, E, G et H a trois de ses cases occupées par des nombres impairs distincts et distincts de 5, et dont la somme doit être 15. Impossible. Un tel carré n'existe pas.

Sauts de puce

1. ***a.*** Un saut vers la gauche compensant un saut vers la droite, le but final est atteint après deux sauts vers la gauche. La puce a atteint le point d'abscisse -2.
b. Il y a 15 façons de placer les deux sauts à droite dans l'ensemble des 6 sauts, donc 15 parcours possibles. En effet, pour choisir où placer les deux « d » dans une suite de quatre « g » et deux « d », il y a six façons de placer le premier, et il reste 5 places pour le second, ce qui fait 30 possibilités, mais elles sont interchangeables deux par deux. Il y a donc bien 15 parcours possibles.

2. Si on a x sauts d, il y a alors $n - x$ sauts g pour aller du point d'abscisse a au point d'abscisse b et on doit avoir $a + x - (n - x) = b$ soit $2x = n + b - a$.
a. Donc le triplet $(5, 10, 1)$ n'est pas admissible car, dans ce cas, $n + b - a$ est négatif.
b. Le triplet $(6, 5, 3)$ est obtenu avec 2 sauts d et 5 sauts g car l'équation a pour solution $x = 2$.
c. Le triplet $(11, 5, 1)$ ne peut être obtenu car, dans ce cas, $n + b - a$ est impair.



3. À gauche, un exemple d'un tel parcours.

4. ***a.*** Il reste quatre sauts à faire pour aller du point d'abscisse 0 au point d'abscisse 2, ce qui nécessite trois sauts vers la droite et un saut vers la gauche parmi 4 sauts ou un saut vers la gauche. Il y a 4 façons de placer ce saut vers la gauche donc 4 parcours possibles.

b. Les sauts à gauche deviennent les sauts à droite et réciproquement. Il y a donc le même nombre de parcours qu'en ***a.***

5. On additionne terme à terme : le nombre de parcours permettant de joindre a à b en n sauts en passant par l'origine une première fois à l'issue du p-ième saut est égal au nombre de parcours permettant de joindre a à $-b$ en n sauts en passant par l'origine une première fois à l'issue du p-ième saut. À l'issue de ce cumul, « la première fois » devient « au moins une fois » grâce à l'élimination des doublons.