MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

Amériques-Antilles-Guyane

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

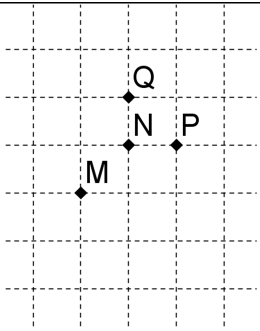
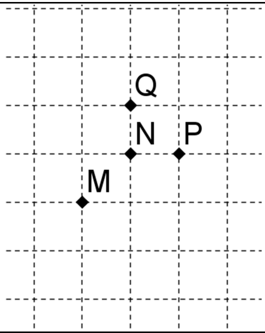
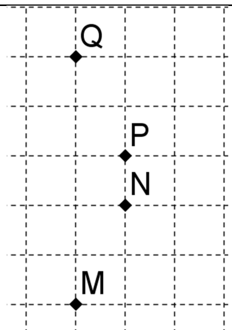
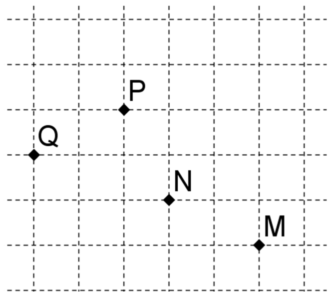
Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Saute, saute, sauterelle*) et 2 (*De racines en carrés*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Saute, saute, sauterelle*) et 3 (*Le fabricant de puzzles*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Saute, saute, sauterelle…

Quatre sauterelles sont placées sur un plan. À chaque seconde, une (et une seule) quelconque d'entre elles saute au-dessus d'une autre selon la règle suivante : si la sauterelle placée en A saute au-dessus de la sauterelle placée en B, elle atterrit au point A', symétrique de A par rapport à B.
On représente la situation en utilisant un repère orthonormé $(O;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Au départ, les quatre sauterelles occupent les sommets – tous à coordonnées entières – d'un carré de côté 1.

1. Pour chacun des cas suivants, indiquer un exemple de configuration initiale possible en y associant une liste de sauts possibles (l'ordre alphabétique des lettres M, N, P, Q ne préjuge pas de leur disposition initiale).

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>a. il y a eu deux sauts</td>
<td>b. il y a eu quatre sauts</td>
<td>c. il y a eu quatre sauts</td>
<td>d. il y a eu quatre sauts</td>
</tr>
</table>

2. ***a.*** Est-il possible que les quatre sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, toutes sur le même point ?
b. Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les quatre sauterelles se trouvent sur quatre points alignés ?
c. Est-il possible que trois sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, sur le même point ?

3. ***a.*** Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les sauterelles forment à nouveau un carré ? Donner un exemple.
b. Montrer qu'un tel carré a nécessairement pour côté 1.

4. On suppose que les positions de départ sont les points dont les couples de coordonnées sont $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. On dira qu'une sauterelle est *de type PP* si ses deux coordonnées sont des entiers pairs, *de type PI* si son abscisse est paire et son ordonnée impaire, *de type IP* si son abscisse est impaire et son ordonnée paire, et *de type II* si ses deux coordonnées sont impaires.
a. Prouver qu'à tout instant les sauterelles se trouvent sur des points à coordonnées entières, et que chacune a conservé son *type* initial.
b. Est-il possible que trois des sauterelles soient à une même distance de la quatrième ?
c. Prouver que l'on n'aura jamais trois sauterelles alignées.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

De racines en carrés

La *partie entière* d'un nombre est le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre. La partie entière d'un nombre réel x se note $E(x)$. Par exemple $E(4) = 4$ et $E(4{,}3) = 4$. On notera que, lorsque x n'est pas un entier, on a toujours $E(x) < x < E(x) + 1$.

On dit d'un entier naturel qu'il est un *carré parfait* s'il est le carré d'un autre entier.

On souhaite étudier l'algorithme suivant : on considère un nombre N, entier strictement positif différent d'un carré parfait. On lui ajoute la partie entière de sa racine carrée, puis on recommence avec le résultat obtenu. Et ainsi de suite jusqu'à tomber éventuellement sur un carré parfait.

1. En partant de $N = 38$, on obtient successivement $44, 50, 57$ puis 64. Justifier ces résultats.

2. Quel est le premier carré obtenu en partant du nombre 26 ? Celui obtenu en partant du nombre 69 ? D'où partir pour aboutir à 9 ?

3. Soit N un entier strictement positif différent d'un carré parfait. On note systématiquement $n = E(\sqrt{N})$ dans la suite du problème. On pose : $a = N - n^2$.
Montrer que a vérifie : $0 < a < 2n + 1$ et, plus précisément : $1 \leq a \leq 2n$.

4. Dans cette question, on étudie le cas des entiers N pour lesquels $1 \leq a \leq n$. On se donne un entier N vérifiant cette double inégalité, et on nomme $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p$ les nombres obtenus après une, deux,…, p étapes de l'algorithme décrit plus haut à supposer qu'il n'a pas encore terminé.
a. Justifier que $N_1 = n^2 + n + a$.
b. Montrer que $N_2 = (n+1)^2 + (a-1)$.
c. Que peut-on en déduire si $a = 1$?
d. Si $a \neq 1$, montrer que $N_4 = (n+2)^2 + (a-2)$. Que peut-on en déduire si $a = 2$?
e. Conclure que, dans tous les cas où $1 \leq a \leq n$, l'algorithme termine.

5. Soit un entier N pour lequel $n + 1 \leq a \leq 2n$. Montrer que $N_1 = (n+1)^2 + (a - n - 1)$.

6. Démontrer que le processus termine toujours.

7. ***a.*** De tous les entiers inférieurs ou égaux à 15 et différents d'un carré parfait, quel est celui qui nécessite le plus d'étapes pour arriver au premier carré ?
b. Même question pour les entiers inférieurs ou égaux à 99.
On pourra proposer une solution algorithmique, dont on recopiera le programme implanté sur la calculatrice (la fonction partie entière peut y être désignée par les commandes int( ) ou floor ( )).

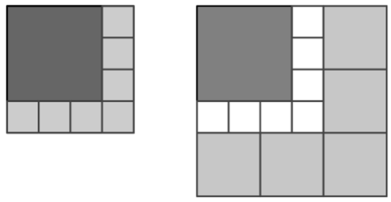
Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Le fabricant de puzzles

Pièces toutes carrées

Un fabricant de puzzles étudie la conception d'un puzzle carré dont les pièces seraient elles-mêmes toutes des carrés – de dimensions diverses si nécessaire – dont les côtés resteraient parallèles aux côtés du carré initial.

Les puzzles représentés ci-contre comportent respectivement 8 et 13 pièces carrées. On se demande pour quelles valeurs de n entier non nul on peut créer un puzzle constitué de n pièces carrées, les pièces pouvant être de dimensions différentes.



1. Représenter des puzzles aux spécifications voulues comportant 4, 6, 7, 9 puis 10 pièces carrées.

2. Pour tout entier n, montrer que si on peut créer un puzzle du carré constitué de n pièces carrées, alors on peut en créer un de $n + 3$ pièces carrées.

3. En déduire que, pour tout entier k, on peut créer un puzzle constitué de $1 + 3k$ pièces carrées.

4. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on peut créer un puzzle constitué de $3k$ pièces carrées.

5. Déterminer finalement l'ensemble des entiers n pour lesquels on peut créer un puzzle constitué de n pièces carrées.

Pièces en forme de triangles isocèles

On imagine à présent des puzzles carrés constitués de triangles tous isocèles (pas nécessairement identiques).

6. Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1, on peut concevoir un puzzle carré constitué de n triangles rectangles isocèles.

7. Concevoir deux puzzles distincts constitués chacun de sept pièces en forme de triangles isocèles non rectangles.

8. Proposer un procédé aboutissant à un puzzle constitué de 2 017 pièces en forme de triangles isocèles non rectangles. On pourra remarquer, en le justifiant, qu'un triangle isocèle peut toujours être découpé en n^2 triangles isocèles, n entier non nul.