Éléments de solution

Exercice 1

Pas mal de têtes

Étude préliminaire

1. ***a.*** Clara coupe la moitié des têtes encore en place, plus une, donc elle en coupe $x + 1$ et il en reste $x - 1$.
b. Noémie coupe le tiers des têtes encore en place, plus deux, donc elle en coupe $x + 2$ et il en reste $2x - 2$.
c. Violette coupe le quart des têtes encore en place, plus trois, donc elle en coupe $x + 3$ et il en reste $3x - 3$.
d. Dans le cas d'un assaut de Violette suivi d'un assaut de Noémie, on passe de $4x$ à $3x - 3$ puis à $2x - 2 - 2 = 2x - 4$

2. On suppose que $N = 12$. Violette commence, et coupe $3 + 3 = 6$ têtes. Il en reste 6. Noémie en coupe 4 et il en reste 2 et Clara en coupe $1 + 1 = 2$ et c'est fini.

3. Dans le cas $N = 2\,023$, nombre qui n'est ni pair ni multiple de 3 ($2\,023 = 7 \times 17^2$), aucune de chevalières ne peut commencer l'étêtage.

Autres situations

1. ***a.*** On suppose que le dragon possède $8k$ têtes. Cet effectif est un multiple de 4. Violette mène l'assaut et ramène cet effectif à $6k - 3$. Noémie peut lui succéder et le nombre de têtes devient $4k - 4 = 4(k - 1)$.
b. Si l'effectif initial est $4(4k + 1)$, Violette en coupe $4k + 1 + 3 = 4k + 4$ et il en reste … $12k$.
c. Si l'effectif initial est $4(4k + 3)$, on lance Violette qui coupe $4k + 3 + 3$ têtes et il en reste $12k + 6$. On lance Noémie qui en coupe $4k + 2 + 2 = 4k + 4$ et il en reste $8k + 2$. Clara arrive et coupe $4k + 1 + 1 = 4k + 2$. Il reste alors $4k$ têtes au dragon.

Quelques conclusions

1. ***a.*** On suppose que N est un multiple de 4. La question précédente examine tous les types de multiples de 4 :
Les produits de 4 par des nombres pairs s'écrivent $8k$, les produits de 4 par des nombres impairs s'écrivent $4(4k + 1)$ ou $4(4k + 3)$. Dans ces trois situations, on a montré qu'on pouvait passer d'un multiple de 4 à un autre multiple de 4, plus petit. Le plus petit multiple de 4 non nul est 4, et alors c'est Violette qui agit.
b. On suppose que N est pair. La question précédente règle le cas des multiples de 4, il reste à examiner les multiples impairs de 2. Si $N = 2(2k + 1)$, on fait intervenir Clara, qui ramène l'effectif à … $2k$, c'est-à-dire à un effectif pair plus petit que le précédent. Le plus petit effectif pair est 2 et c'est Clara qui agit.
c. Si N est un multiple de 3, ou bien c'est le produit de 3 par un nombre pair, il est pair et on utilise la démarche précédente, ou bien $N = 3(2k + 1)$. Noémie coupe $2k + 1 + 2 = 2k + 3$ têtes et il en reste $4k$ et le problème est résolu.

2. Dans le cas où N n'est ni pair ni multiple de 3, aucune des chevalières ne peut intervenir. Elles ont échoué.

Exercice 2

Le bal des tangentes

1. On obtient l'égalité en développant le membre de droite.
2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α a pour pente $f'(\alpha)$, c'est-à-dire $3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$. Dire qu'elle passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β, c'est dire que :

$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d - (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = (3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)(\beta - \alpha)$$

$$a(\beta^3 - \alpha^3) + b(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)(3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)$$

Comme α et β sont distincts, cette égalité fournit :

$$a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + b(\alpha + \beta) + c = 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$$

Ou encore :

$$a(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2) + b(\beta - \alpha) = 0$$

On met $(\beta - \alpha)$ en facteur là où on peut :

$$a(\beta - \alpha)(\beta + 2\alpha) + b(\beta - \alpha) = 0$$

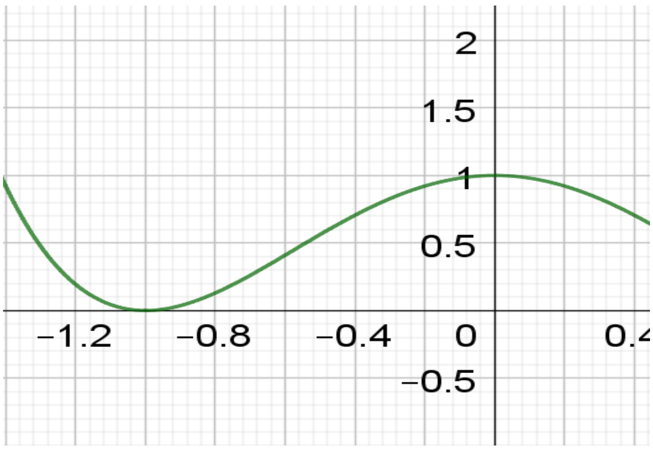
Et on obtient après simplification la relation demandée.

3. La condition proposée se traduit par les trois égalités, simultanément réalisées :

$$\begin{cases} a(2\beta + \alpha) + b = 0 \\ a(2\beta + \gamma) + b = 0 \\ a(2\gamma + \alpha) + b = 0 \end{cases}$$

Si cela a lieu, alors $2\alpha + \beta = 2\beta + \gamma = 2\gamma + \alpha$.
Ces égalités s'écrivent aussi : $2\alpha = \beta + \gamma, 2\beta = \gamma + \alpha, 2\gamma = \alpha + \beta$.
De trois nombres réels, chacun est la moyenne des deux autres. Ils sont donc égaux. Mais cela contredit l'hypothèse qui les prenait distincts.

4. Il se trouve que, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes à la courbe représentative de la fonction sont confondues et on peut par conséquent « tourner » sur les points de la courbe d'abscisses -1 et 1 pour en faire une liste de quatre points (pas distincts).

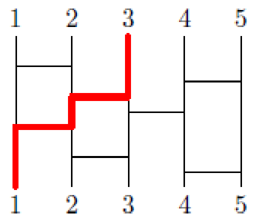


Exercice 3

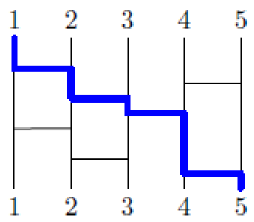
Amidakujis

1.

a.



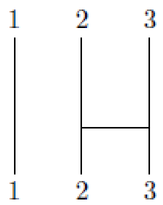
b.



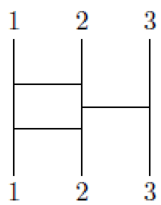
c. On a déjà déterminé que 5 est attribué à 1 et que 1 est attribué à 3. On détermine de même que 2 est attribué à 5, 3 est attribué à 2, et 4 est attribué à 4. D'où : $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$.

2.

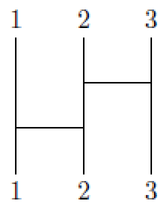
a.



b.



c.



3. En appliquant le même principe de parcours dans un amidakuji mais en partant d'un numéro du bas et en remontant, on aboutit à un numéro du haut donc toutes les tâches sont attribuées.

4. a. D'après la question précédente chaque personne réalise une tâche et chaque tâche est réalisée par une personne. Le nombre d'attributions des tâches est donc le nombre de triplets formés avec les trois numéros 1, 2 et 3 c'est-à-dire $3 \times 2 \times 1 = 6$.

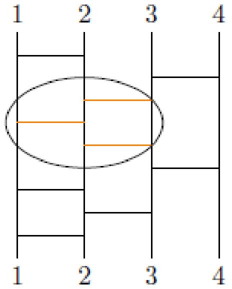
b. Il y a trois barres verticales délimitant deux bandes verticales qu'on va appeler G(gauche) et D(droite).
Sans barre horizontale, on ne peut faire qu'un seul amidakuji.
Avec une seule barre horizontale, il y a deux possibilités de placement de cette barre : dans G ou dans D. On a donc alors 2 amidakujis.
Avec deux barres horizontales, il y a toujours pour chaque barre deux hauteurs possibles : B (basse) ou H (haute) et deux bandes possibles (G ou D) d'où $2 \times 2 = 4$ amidakujis dans ce cas.
Avec trois barres horizontales, on reprend le même raisonnement mais avec cette fois-ci trois hauteurs possibles : B, M (moyenne) et H et, pour chaque hauteur deux bandes possibles (G ou D) d'où $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ amidakujis dans ce cas.
Au total, on obtient $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ amidakujis différents.

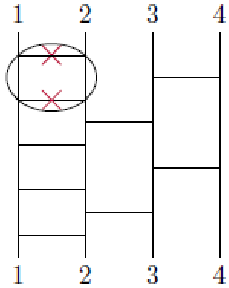
5. Les amikadujis *a*, *b*, et *d* correspondent à $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, tandis que *c* correspond à $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$. L'amikaduji recherché est donc celui du c.

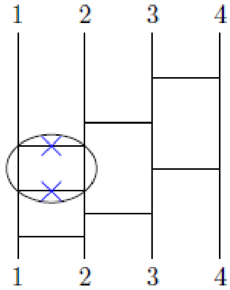
6. a. En cherchant le chemin d'attribution d'une tâche, la première barre horizontale fait changer de barre verticale, tandis que la seconde barre horizontale rencontrée fait revenir à la barre verticale initiale. Ces barres horizontales non séparées par une autre barre horizontale dans un intervalle voisin sont donc superflues.

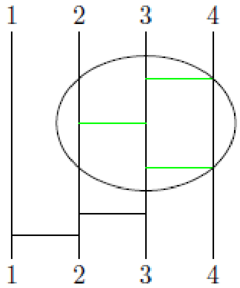
b. On constate que les deux configurations (elles-mêmes amidakujis) correspondent à la même permutation, donc ils peuvent être échangés, à condition qu'il n'y ait pas de barre horizontale s'intercalant avec ce morceau d'amidakuji, avant ou après échange.

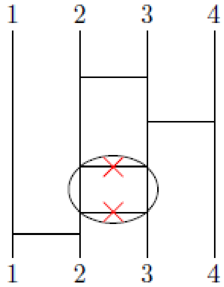
c. Voici les étapes :

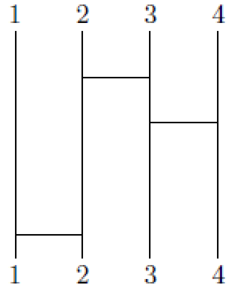

1 2 3 4
1 2 3 4


1 2 3 4
1 2 3 4

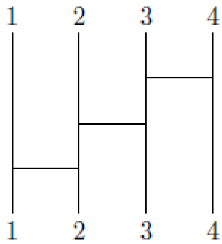

1 2 3 4
1 2 3 4

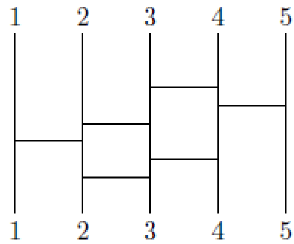

1 2 3 4
1 2 3 4


1 2 3 4
1 2 3 4


1 2 3 4
1 2 3 4

7.


1 2 3 4
1 2 3 4


1 2 3 4 5
1 2 3 4 5