Éléments de solution

k-couples

Partie A Questions préliminaires

1. $(6\,;30)$ et $(10\,;10)$ sont des 5-couples puisque $6 \leq 30$ et $6 \times 30 = 180 = 5 \times (6 + 30)$
De même, $10 \leq 10$ et $10 \times 10 = 100 = 5 \times (10 + 10)$.
$(30\,;6)$ n'est pas un 5-couple car $30 > 6$.
$(5\,;25)$ n'est pas un 5-couple puisque $5 \times 25 = 125\,; 5 \times (5 + 25) = 150$ et $125 \neq 150$.

2. $8 \times 56 = 7(8 + 56)$ avec $8 \leq 26$ donc $(8\,;56)$ est un 7-couple.

3. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $(3\,;5)$ soit un k-couple.
Alors $3 \times 5 = k(3 + 5)$. Mais 15 n'est pas multiple de 8. La réponse est non.

4. $mx \times my = m^2xy = m^2 \times k(x + y) = mk(mx + my)$. De plus, comme $m > 0$, $mx \leq my$. Donc (mx, my)est un mk-couple.

Partie B Recherche de certains $\boldsymbol{k}$-couples

1. Supposons que $(x\,;y)$ soit un 1-couple.
D'une part $y \geq 2$ puisque $(1\,;1)$ n'est pas un 1-couple. Ainsi $y - 1$ est un entier naturel non nul.
D'autre part, $xy = x + y$ d'où $x(y - 1) = y$ avec x entier naturel non nul donc $y - 1$ divise y.
$y - 1$ divise alors $y - (y - 1) = 1$. Comme $y - 1 \neq -1$, on en déduit que $y - 1 = 1$ soit $y = 2$.
En substituant y par 2 dans $xy = x + y$, on obtient $x = 2$.
Or $2 \times 2 = 1 \times (2 + 2)$. Donc $(2\,;2)$ est bien un 1-couple et c'est le seul 1-couple.

2. Soit$(x\,;y)$ un k-couple. La condition $xy = k(x + y)$ implique $(x - k)(y - k) = k^2$.
Supposons $x - k < 0$ alors $y - k < 0$ (pour que le produit soit strictement positif).
Comme de plus x et y sont supérieurs ou égaux à 1 alors $x - k \geq 1 - k$ et $y - k \geq 1 - k$.
Ainsi $1 - k \leq x - k < 0$ et $1 - k \leq y - k < 0$ soit $0 < k - x \leq k - 1$ et $0 < k - y \leq k - 1$.
D'où $(k - x)(k - y) \leq (k - 1)^2$ soit$(x - k)(y - k) \leq (k - 1)^2$, ce qui contredit $(x - k)(y - k) = k^2$.

Ainsi $x - k$ est un diviseur positif de k^2donc $x - k = 1$ ou $x - k = k$ ou $x - k = k^2$ puisque, k étant premier, les seuls diviseurs de k^2 sont 1, k et k^2.
Si $x - k = 1$ alors $x = k + 1$ et on obtient $y = k^2 + k$.
Si $x - k = k$ alors $x = 2k$ et on obtient $y = 2k$.
Si $x - k = k^2$ alors $x = k^2 + k$ et on obtient $y = k + 1$. On élimine ce cas puisqu'il faut $x \leq y$.
Les couples $(k + 1\,; k^2 + k)$ et $(2k\,; 2k)$ sont bien des k-couples
En effet, $(k + 1)(k^2 + k) = k(k + 1 + k^2 + k)$ et $2k \times 2k = k(2k + 2k)$. Et ce sont les seuls.

3. Raisonnement identique sachant que les diviseurs de 2021^2 sont1, $43, 47, 43^2, 43 \times 47, 47^2, 47 \times 43^2$, 43×47^2 et 2021^2. On obtient les couples :
$(2022\,;4086462)$,$(2064\,;97008)$, $(2068\,;88924)$,$(3870\,;4230)$,$(4042\,;4042)$.

Partie C $\boldsymbol{k}$-points et croix

1. Le programme complété figure ci-contre.

```
def croix(x,y):
    if x*y % (x+y)==0:
        return True
    else:
        return False
```

2. Le point de coordonnées$(2k\,;2k)$ est un k-point appartenant à D.
Le point de coordonnées $(k + 1\,; k^2 + k)$ est un k-point appartenant à P.

3. Soit $A(x; y)$ une croix : il existe un entier naturel non nul k tel que $(x; y)$ soit un k-couple.
Pour m entier naturel non nul, le point $A_m(mx\,; my)$ est un mk-point donc A_m est une croix.
De plus il appartient à la droite (OA) puisque $\overrightarrow{OA_m} = m\overrightarrow{OA}$.

4. Soit d une droite passant par O et de coefficient directeur rationnel $\frac{a}{b}$ supérieur ou égal à 1 (a et b entiers naturels avec $0 < b \leq a$).
Il est facile de vérifier que $A\big(b(a + b)\,; a(a + b)\big)$ appartient à d et que A est un ab-point donc une croix.
D'après la question 2), on en déduit que d contient une infinité de croix.

Chaînes

1. ***a.*** La suite $1, 2, 4, 5, 10, 20, 21$ est une chaîne de longueur 7 (on vérifie que $2 = 1 + 1, 4 = 2 + 2$, $5 = 4 + 1, 10 = 5 + 5, 20 = 10 + 10, 21 = 20 + 1$)
b. La suite $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 22$ est une chaîne de longueur 12 (on vérifie que $22 = 13 + 9$, $13 = 10 + 3, 10 = 9 + 1$, les termes précédents s'obtenant an ajoutant 1 à leur prédécesseur).

2. ***a.*** $a_2$est obtenu comme somme de deux termes précédents, la seule possibilité est $a_2 = 1 + 1 = 2$.
Les termes précédant a_3 sont 1 et 2. Les seules possibilités sont $a_3 = 3$ ou 4, attendu que la suite doit être strictement croissante.
b. La méthode de construction de la chaîne indique que chaque terme est inférieur ou égal au double du terme précédent (au plus la somme du terme précédent et de lui-même). Le terme de rang k est donc inférieur ou égal à la puissance de 2 correspondante (en commençant la liste des puissances de 2 à 2^0, $a_k \leq 2^{k-1}$.
3. La suite $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ a pour longueur n et pour dernier terme n. Ce n'est pas la seule. On peut aussi ajouter 2 à chaque terme à partir du deuxième, et finir en ajoutant 1 si on est parvenu à $n - 1$ et 2 si on est parvenu à $n - 2$.

4. ***a.*** D'après la question **2.** ***b.***, pour une chaîne de longueur $\ell(n)$ dont le dernier terme est n, $a_{\ell(n)} \leq 2^{\ell(n)-1}$, et donc $n \leq 2^{\ell(n)-1}$, d'où il vient que $2^p \leq 2^{\ell(n)-1}$, ce qui prouve que $\ell(n) \geq p + 1$.
b. Le $(p + 1)$ème terme d'une chaîne de longueur $p + 1$ est inférieur ou égal à 2^p(résultat obtenu en doublant chaque terme pour obtenir le suivant). Le seul entier n compris entre 2^pet 2^{p+1}pour lequel $\ell(n) = p + 1$ est donc 2^p.

5. ***a.*** La question précédente assure que $\ell(12) > 4$. La chaîne $1, 2, 4, 8, 12$ a pour longueur 5 et son dernier terme est 12. Donc $\ell(12) = 5$.
b. Comme précédemment, $\ell(11) > 4$. Le troisième terme de la suite est 3 ou 4. S'il vaut 3, on élimine les cas où le quatrième terme est inférieur ou égal à 5, le cinquième étant dans ce cas au maximum 10, il reste le cas $1, 2, 3, 6$, on ne peut obtenir comme cinquième terme que $7, 8, 9, 12$. On raisonne de même pour éliminer un troisième terme égal à 4 (le quatrième pouvant être $5, 6, 8$). Les suites de longueur 5 ne conviennent donc pas. En revanche, la chaîne $1, 2, 4, 8, 10, 11$, de longueur 6, convient.
c. Adjoindre à une chaîne de dernier terme n le terme supplémentaire $(n + 1)$ n'est pas la seule façon d'obtenir une chaîne de dernier terme $n + 1$ … On a vu que $\ell(11) > \ell(12)$, ce qui nie la croissance éventuelle, comme $\ell(3) > \ell(2)$ nie la décroissance.

6. ***a.*** On a $2^p < 2^p + 2^q < 2^{p+1}$ et on a vu que le seul entier n compris entre 2^pet 2^{p*1} pour lequel $\ell(n) = p + 1$ est donc 2^p. La chaîne permettant de réaliser ce résultat fait figurer toutes les puissances de 2 inférieures à 2^p, notamment 2^q, qu'il suffit d'ajouter au dernier terme 2^p pour obtenir une chaîne de longueur $p + 2$ de dernier terme $2^p + 2^q$. D'après la question **4.** ***b.***, ce résultat est le meilleur possible.
b. Le développement du membre de droite commence par $2^r\big((2^{q-r}(2^{p-q} + 1) + 1)\big) + 2^s$, d'où on voit la suite…
Le schéma de calcul précédent montre comment obtenir une chaîne aboutissant à $2^p + 2^q + 2^r + 2^s$: on ajoute 1 quand il faut et on duplique les termes autant de fois que nécessaire. D'où le résultat.
c. Le même raisonnement s'étend à un nombre quelconque de puissances de 2.
d. On peut écrire $2\ 021 = 1\ 024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 + 1$. Dans cette somme apparaissent 8 puissances de 2 distinctes, la plus élevée étant 2^{10}. En appliquant la question précédente $\ell\big(2\ 021\big) \leq 10 + 8$.
Une chaîne de 18 termes aboutissant à 2 021 est, par exemple :
$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\ 024, 1\ 536, 1\ 792, 1\ 920, 1\ 984, 2\ 016, 2\ 020, 2\ 021$

7. La chaîne $1, 2, 4, 5, 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576, 1\ 152, 1\ 728, 2\ 016, 2\ 021$ a pour longueur 15. Donc $\ell\big(2\ 021\big) \leq 15$.
Une chaîne de longueur 13 a un onzième terme inférieur à 1 024, auquel on ajoute successivement deux des termes précédents, inférieurs respectivement à 512 et à 256 (deux fois 512, cela ferait 2 048). On obtient au maximum 1 792. Donc $\ell\big(2\ 021\big) \geq 13$

Produits de chiffres

1. Le produit des chiffres de e est $151\ 200$.

2. Pour trouver un élément de E dont les chiffres aient pour produit $P(e)$ il suffit de changer l'ordre des chiffres de e, par exemple 27 233 552 232.
Un exemple d'entier dont le produit des chiffres est le même que celui de e et n'appartenant pas à E s'obtient par exemple en remplaçant les deux chiffres 2 successifs par le chiffre 4 : 2 723 355 432

3. Supposons qu'il existe un plus grand entier naturel, pas nécessairement élément de E, dont le produit des chiffres soit le même que celui de e. On ajoute un 1 à gauche de l'écriture décimale de ce nombre et on obtient un entier plus grand mais dont le produit des chiffres est le même.
Il n'existe donc pas un plus grand entier naturel, pas nécessairement élément de E, dont le produit des chiffres soit le même que celui de e.

4. Le produit des chiffres de l'entier e est $2^5 \times 3^3 \times 5 \times 5 \times 7$. L'idée est de regrouper entre eux les chiffres de l'écriture de e pour obtenir un entier ayant moins de chiffres.

On remarque déjà qu'il faut conserver les chiffres 5, 5 et 7 car s'ils sont multipliés entre eux ou par 2 ou par 4, on obtient des nombres plus grands que 10 et on change le produit des chiffres de e.
On travaille donc avec le produit $2^5 \times 3^3 = 864$ et on cherche l'écriture comportant le moins de chiffres mais dont le produit des chiffres vaut 864.
Comme $9 \times 9 \times 9 = 729$ et $729 < 864$, cette écriture comporte au moins 4 chiffres.
Garder le chiffre 2 comme le chiffre le plus à gauche garantit, pour la même longueur de l'écriture, d'avoir l'entier le plus petit.
On est ainsi ramené à chercher un entier dont l'écriture comporte 3 chiffres dont le produit est $432 = 2^4 \times 3^3$.
Notons $\overline{abc}$ l'écriture de ce nombre. Nécessairement $bc \leq 81$ ce qui entraine $a > 5$.
* Si $= 6$, alors $bc = 72$ ce qui donne $b = 8$ et $c = 9$ (en rangeant les chiffres dans l'ordre croissant pour avoir l'entier le plus petit)
* 7 n'est pas un diviseur de 432
* Si $a = 8$ alors $bc = 54$ ce qui donne $b = 6$ et $c = 9$.
* Si $a = 9$ alors $bc = 48$ ce qui donne $b = 6$ et $c = 8$.
Dans tous les cas, les 3 chiffres a, b, c sont donc dans l'ordre croissant 6,8,9.
Le plus petit nombre qui a le même produit des chiffres que e est alors, en écrivant tous les chiffres dans l'ordre croissant : $\mathbf{2556789}$