Éléments de correction- sujet académique 2025

Exercice 4

1. Un scénario possible en trois jours.

Jour		R	V
0	État initial	0	0
1	Déchets produits	50	50
	État des cuves avant vidage	50	50
	État des cuves après vidange	0	50
2	Déchets produits	80	20
	État des cuves avant vidage	80	70
	État des cuves après vidange	0	70
3	Déchets produits	90	10
	État des cuves avant vidage	90	80
	État des cuves après vidange	0	80

2. Si un jour la cuve V contient $100 - a$ litres après vidange et si le lendemain l'usine produit $100 - \frac{a}{2}$ litres de déchets rouges et $\frac{a}{2}$ litres de déchets verts, alors il y aura avant vidange, $100 - \frac{a}{2}$ litres de déchets dans chaque cuve et après vidange $100 - \frac{a}{2}$ litres dans la cuve V. Si ce phénomène se reproduisait suffisamment longtemps, la quantité de liquide de la cuve V pourrait se rapprocher autant que désiré de 100 litres.

3. On en déduit qu'après vidange la cuve V pourrait contenir “presque” 100 litres de liquides ; comme elle pourrait en recevoir 100 de plus le lendemain, la cuve V doit bien faire au moins 200 litres pour ne pas risquer de déborder.

4. On note x la quantité de déchets rouges produite ce jour-là ; il y a alors $100 - x$ quantité de déchets verts. Et, avant vidange, les cuves R et V contiennent respectivement $r + x$ et $v + 100 - x$ litres :

- si $r + x < v + 100 - x$ alors $r' = r + x$ et $v' = 0$;
- si, $r + x \geq v + 100 - x$ alors $r' = 0$ et $v' = v + 100 - x$.

Dans tous les cas $r' + v' \leq r + x$ et $r' + v' \leq v + 100 - x$ donc :

$2(r' + v') \leq r + x + v + 100 - x$ soit $r' + v' \leq \frac{r+v+100}{2}$.

Donc, si $r + v \leq 100$ alors $r' + v' \leq \frac{100+100}{2}$ soit $r' + v' \leq 100$.

5. On en déduit que puisque, au premier jour, les cuves sont vides, le lendemain elles ne contiendront à elles deux pas plus de 100 litres d'après ce qui précède, le jour suivant non plus pour la même raison et ainsi de suite donc elles ne contiendront jamais plus de 100 litres à elles deux après vidange, et donc chacune ne contiendra jamais plus de 100 litres. Ainsi, il suffit d'avoir des cuves de 200 litres pour être tranquille.
Cela est nécessaire pour la cuve V d'après la question 2.
En remarquant que si un jour, la cuve R contient $100 - a$ litres après vidange, le lendemain, elle peut en contenir $100 - \frac{2}{3}a$ (l'usine produit $\frac{a}{3}$ litres de déchets rouges et $100 - \frac{a}{3}$ litres de déchets verts), il se pourrait que comme la cuve V, la cuve R contienne “presque” 100 litres avant vidange.
Finalement, les cuves doivent avoir une contenance de 200 litres et cela suffit pour être sûr qu'elles ne pourront jamais déborder.

6.

a. Un scénario possible :

Jour		R	V	B
0	État initial	0	0	0
1	Déchets produits	40	30	30
	État des cuves avant vidange	40	30	30
	État des cuves après vidange	0	30	30
2	Déchets produits	60	20	20
	État des cuves avant vidange	60	50	50
	État des cuves après vidange	0	50	50
3	Déchets produits	70	15	15
	État des cuves avant vidange	70	65	65
	État des cuves après vidange	0	65	65
4	Déchets produits	80	10	10
	État des cuves avant vidange	80	75	75
	État des cuves après vidange	0	75	75
5	Déchets produits	90	5	5
	État des cuves avant vidange	90	80	80
	État des cuves après vidange	0	80	80
6	Déchets produits	90	5	5
	État des cuves avant vidange	90	85	85
	État des cuves après vidange	0	85	85
7	Déchets produits	90	5	5
	État des cuves avant vidange	90	90	90
	État des cuves après vidange	0	90	90

b. Il suffit que l'usine produise $100-\frac{2}{3}a$ litres de déchets rouges, $\frac{1}{3}a$ litres déchets verts et $\frac{1}{3}a$ déchets litres bleus pour qu'il y ait avant vidange $100-\frac{2}{3}a$ litres de déchets de chaque couleur.

c. Si le processus précédent se répète, les cuves V et B contiendront chacune un nombre de litres aussi proche que l'on veut de 100. L'une et l'autre pourrait recevoir 50 litres de déchets le jour suivant, et contenir avant vidange un nombre de litres aussi proche que l'on veut de 150. Après vidange, la cuve V serait vide et la cuve B contiendrait un nombre de litres aussi proche de 150 que l'on veut. Comme la cuve B peut recevoir 100 litres le jour suivant, elle doit faire au moins 250 litres pour ne pas risquer de déborder.

d. Notons x et y les litres de déchets rouges et verts produits le lendemain. Il y aura donc $100-x-y$ litres de déchets bleus produits.

Notons m le maximum de $r+x$, $v+y$ et $b+100-x-y$ (contenances des cuves avant vidange le lendemain).

Alors $r'+v'+b'=r+x+v+y+b+100-x-y-m=r+v+b+100-m$ donc :

- $r'+v'+b'\leq r+v+b+100-(r+x)$;
- $r'+v'+b'\leq r+v+b+100-(v+y)$;
- $r'+v'+b'\leq r+v+b+100-(b+100-x-y)$.

En sommant ces trois inégalités, puis en divisant par 3 on obtient après simplifications :

$$r'+v'+b'\leq \frac{2(r+v+b)+200}{3}.$$

Donc si $r+v+b\leq 200$ alors $r'+v'+b'\leq 200$.

On en déduit que comme les trois cuves sont vides au départ, le lendemain, elles ne contiendront pas plus de 200 litres, et ainsi de suite les jours suivants.

e. Supposons $b' > 150$. Cela veut dire que la cuve vidée est R ou V (sinon $b' = 0$).
Supposons que ce soit R (raisonnement analogue si c'est V).
Cela veut dire que $m = r + x$, et que $r + x \geq v + y$ et $r + x \geq b + 100 - x - y$.
Or $b' = b + 100 - x - y$.
De la deuxième inéquation, on obtient : $r + x \geq b + 100 - x - y > 150$.
On en déduit que $r + x + b + 100 - x - y > 300$ soit $r + b - y > 200$ ce qui implique $r + b > 200$ car $y \geq 0$. Ce qui n'est pas possible d'après la question précédente.
Donc $b' \leq 150$.

f. Comme la cuve B ne dépasse jamais 150 litres après vidange, elle ne contiendra jamais plus de 250 litres. Une capacité de 250 litres suffit et est nécessaire d'après la question 6.c.

Cas de la cuve V :
Si, après vidange, les cuves R et V contiennent $100 - a$ litres de déchets et que la cuve B est vide et si le lendemain l'usine produit respectivement $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, $100 - \frac{a}{3}$ litres de déchets rouges, verts et bleus, les cuves R, V et B contiendront avant vidange respectivement $100 - \frac{2a}{3}$, $100 - \frac{2a}{3}$ et $100 - \frac{a}{3}$ litres et donc après vidange il y aura $100 - \frac{2a}{3}$ litres dans les cuves R et V et rien dans la cuve B. Les contenus de R et V peuvent donc se rapprocher de 100 litres autant que l'on veut après vidange. L'une et l'autre pourraient recevoir 50 litres de déchets le jour suivant, et contenir avant vidange un nombre de litres aussi proche que l'on veut de 150. Après vidange, la cuve R serait vide et la cuve V contiendrait un nombre de litres aussi proche de 150 que l'on veut. Comme la cuve V peut recevoir 100 litres le jour suivant, elle doit faire au moins 250 litres pour ne pas risquer de déborder.
Un raisonnement analogue à celui de la question 6.e montre que $v' \leq 150$.
Donc un volume de 150 litres est nécessaire et suffisant pour la cuve V.

Cas de la cuve R :
Si, après vidange, la cuve R contient $100 - 2a$ litres de déchets, la cuve B en contient $100 - a$ et la cuve V est vide et si le lendemain l'usine produit respectivement $\frac{2a}{4}$, $100 - \frac{3a}{4}$, $\frac{a}{4}$ litres de déchets rouges, verts et bleus, les cuves R, V et B contiendront avant vidange respectivement $100 - \frac{6a}{4} = 100 - 2 \times \frac{3a}{4}$, $100 - \frac{3a}{4}$ et $100 - \frac{3a}{4}$ litres et donc après vidange il y aura $100 - 2 \times \frac{3a}{4}$ litres dans la cuve R, $100 - \frac{3a}{4}$ dans la cuve B et rien dans la cuve V. Les contenus de R et B peuvent donc se rapprocher de 100 litres autant que l'on veut après vidange, avec un volume de B qui reste supérieur à celui de R.
L'une et l'autre pourraient recevoir 50 litres de déchets le jour suivant, et contenir avant vidange un nombre de litres aussi proche que l'on veut de 150. Après vidange, la cuve B serait vide (car elle a un volume supérieur à celui de la cuve R). La cuve R contiendrait un nombre de litres aussi proche de 150 que l'on veut. Comme la cuve R peut recevoir 100 litres le jour suivant, elle doit faire au moins 250 litres pour ne pas risquer de déborder.
Un raisonnement analogue à celui de la question 6.e montre que $r' \leq 150$.
Donc un volume de 150 litres est nécessaire et suffisant pour la cuve R.

Exercice 5

1. Les entiers 1, 2, 4, 5 et 10 sont atteignables : $4 \underset{(1)}{\rightarrow} 2 \underset{(1)}{\rightarrow} 1 \underset{(2)}{\rightarrow} 10 \underset{(1)}{\rightarrow} 5$.

Les entiers 3 et 6 sont atteignables : $4 \underset{(1)}{\rightarrow} 2 \underset{(3)}{\rightarrow} 24 \underset{(1)}{\rightarrow} 12 \underset{(1)}{\rightarrow} 6 \underset{(1)}{\rightarrow} 3$.

L'entier 7 est atteignable : $4 \underset{(1)}{\rightarrow} 2 \underset{(1)}{\rightarrow} 1 \underset{(3)}{\rightarrow} 14 \underset{(1)}{\rightarrow} 7$.

L'entier 8 est atteignable : $4 \underset{(1)}{\rightarrow} 2 \underset{(3)}{\rightarrow} 24 \underset{(1)}{\rightarrow} 12 \underset{(1)}{\rightarrow} 6 \underset{(3)}{\rightarrow} 64 \underset{(1)}{\rightarrow} 32 \underset{(1)}{\rightarrow} 16 \underset{(1)}{\rightarrow} 8$.

L'entier 9 est atteignable : $4 \underset{(1)}{\rightarrow} 2 \underset{(1)}{\rightarrow} 1 \underset{(3)}{\rightarrow} 14 \underset{(3)}{\rightarrow} 144 \underset{(1)}{\rightarrow} 72 \underset{(1)}{\rightarrow} 36 \underset{(1)}{\rightarrow} 18 \underset{(1)}{\rightarrow} 9$.

2. On a :

- ✓ $4a \underset{(1)}{\rightarrow} 2a \underset{(1)}{\rightarrow} a \underset{(2)\text{ ou }(3)}{\longrightarrow} 10a$ ou $10a + 4$;
- ✓ $4a \underset{(1)}{\rightarrow} 2a \underset{(3)}{\rightarrow} 20a + 4 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 2$;
- ✓ $4a \underset{(1)}{\rightarrow} 40a + 4 \underset{(1)}{\rightarrow} 20a + 2 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 1$;

Donc si $4a$ est atteignable alors $10a$, $10a + 1$, $10a + 2$ et $10a + 4$ le sont également.

3. On a :

- ✓ $4a + 2 \underset{(1)}{\rightarrow} 2a + 1 \underset{(2)}{\rightarrow} 20a + 10 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 5$;
- ✓ $4a + 2 \underset{(1)}{\rightarrow} 2a + 1 \underset{(3)}{\rightarrow} 20a + 14 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 7$;
- ✓ $4a + 2 \underset{(3)}{\rightarrow} 40a + 24 \underset{(1)}{\rightarrow} 20a + 12 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 6$;

Donc si $4a + 2$ est atteignable alors $10a + 5$, $10a + 6$ et $10a + 7$ le sont également.

4. On a :

- ✓ $8a + 2 \underset{(3)}{\rightarrow} 80a + 24 \underset{(1)}{\rightarrow} 40a + 12 \underset{(1)}{\rightarrow} 20a + 6 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 3.$

Donc si $8a + 2$ est atteignable alors $10a + 3$ l'est également.

5. On a :

- ✓ $8a + 6 \underset{(3)}{\rightarrow} 80a + 64 \underset{(1)}{\rightarrow} 40a + 32 \underset{(1)}{\rightarrow} 20a + 16 \underset{(1)}{\rightarrow} 10a + 8.$

Donc si $8a + 2$ est atteignable alors $10a + 8$ l'est également.

6. Supposons le contraire et notons m le plus petit entier naturel non nul dont le chiffre des unités est différent de 9 qui soit non atteignable.

Il existe un entier u compris entre 0 et 8 et un entier naturel d non nul (car $m > 10$) tel que $m = 10d + u$.

Les entiers $4d$, $4d + 2$ et $8d + 2$ sont inférieurs à m et sont pairs donc leurs chiffres des unités n'est pas égal à 9. Par définition de m, ces entiers sont donc atteignables. Mais alors, d'après les questions 2, 3 et 4, les nombres $10d$, $10d + 1$, jusqu'à $10d + 7$ seraient atteignables ; comme m est supposé non atteignable, on doit avoir $m = 10d + 8$.

Mais alors $8d + 6$ est inférieur à m et devrait être non atteignable, ce qui, en utilisant la question 5, aboutit à une contradiction.

Donc il n'existe pas de plus petit entier naturel non nul dont le chiffre des unités est différent de 9 qui soit non atteignable. Ainsi, tout entier naturel non nul dont le chiffre des unités est différent de 9 est *atteignable*.

7. Le nombre 49 est atteignable :

$4 \underset{(1)}{\rightarrow} 2 \underset{(3)}{\rightarrow} 24 \underset{(1)}{\rightarrow} 12 \underset{(3)}{\rightarrow} 124 \underset{(1)}{\rightarrow} 62 \underset{(3)}{\rightarrow} 624 \underset{(1)}{\rightarrow} 312 \underset{(1)}{\rightarrow} 156 \underset{(1)}{\rightarrow} 78 \underset{(3)}{\rightarrow} 784 \underset{(1)}{\rightarrow} 392 \underset{(1)}{\rightarrow} 196 \underset{(1)}{\rightarrow} 98 \underset{(1)}{\rightarrow} 49$.

8. Tous les nombres ayant 9 comme chiffre des unités, ont comme double un nombre ayant comme 8 comme chiffre des unités. D'après la question 6 (ou la question 5), ce dernier est atteignable et par application de la règle 1, on atteint le nombre ayant comme 9 comme chiffre des unités.

9. Si $N = 3$ alors 4 est atteignable :

$$3 \rightarrow 30 \rightarrow 304 \rightarrow 152 \rightarrow 76 \rightarrow 38 \rightarrow 384 \rightarrow 192 \rightarrow 96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4$$

Et par suite, d'après les questions précédentes, tout entier naturel non nul est atteignable.

Exercice 6

1. $p_1 = \frac{409}{2\,024} \times 100$ soit 20,2 % arrondi au dixième.
2. $p_2 = \frac{409}{2\,025} \times 100$ soit encore 20,2 % arrondi au dixième.
3. Soit N le nombre de billes du sac :

   Le pourcentage p de billes en bois est tel que $20{,}25 \leq p < 20{,}35$ donc :

   $$412 \times \frac{100}{20{,}35} < N \leq 412 \times \frac{100}{20{,}25}$$

   Soit N compris entre 2 025 et 2 034.
4. S'il y avait $10\,000$ billes dans le sac dont 2 025 en terre alors il y aurait exactement 20,25 % de billes en bois dans le sac. Donc en divisant chaque effectif par 25 : s'il y a 400 billes dans le sac dont 91 en bois il y a exactement 20,25 % de billes en bois dans le sac.

   (400 et 91 étant premiers entre eux, il n'y a pas d'autres possibilités).
5. Soit N le nombre de billes du sac et n le nombre de billes en terre. Le pourcentage p de billes en bois est tel que $39{,}95 \leq p < 40{,}05$ et $\frac{n}{N} \times 100 = p$ donc $\frac{n}{0.4005} < N \leq \frac{n}{0{,}3995}$.

   Il faut que $\frac{n}{0{,}3995} - \frac{n}{0.4005} < 2$ sinon il y aurait deux entiers vérifiant la double inégalité précédente.

   Soit

   $0{,}001n < 2 \times 0{,}3995 \times 0{,}4005$ puis $n < 319{,}9995$.

   Mais si $n = 319$ alors donc $\frac{319}{0{,}4005} < N \leq \frac{319}{0{,}3995}$ d'où $797 < N \leq 798$, et il y a deux valeurs de N possibles : 797 et 798.

   En revanche, pour $n = 318$, on obtient $795 < N \leq 795$ d'où une seule possibilité $N = 795$.