Éléments de solution.
Exercice 4 Sciences politiques

Partie A

Département	Population (en milliers)	Nombre de députés	Pop./Qh arrondi	Reste	Résultat	Moyenne	Résultat
Ain	619	5	5	0,25	5	103,16	5
Aude	365	3	3	0,09	3	91,25	3
Côte d'Or	530	5	4	0,5	5	106	4
Haute-Garonne	1 299	10	11	0,03	11	108,25	12
Loir et Cher	332	3	2	0,82	3	110,67	3
Marne	570	5	4	0,84	5	114	5
Orne	289	3	2	0,45	2	96,33	2
Saône et Loire	556	5	4	0,72	5	111,2	5
Tarn	382	3	3	0,24	3	95,5	3
Essonne	1 254	10	10	0,64	11	114	11
Guadeloupe	402	4	3	0,41	3	100,5	3
Total	6598	56					
Quotient Hare	117,82		51				

1. On vérifie que $619 \times 3 \neq 365 \times 5$, ce qui suffit à montrer qu'il n'y a pas proportionnalité. Les ordres de grandeur ne sont pas du tout les mêmes entre la population et le nombre de sièges, ce qui rendrait une situation de proportionnalité pour le moins improbable.

2. ***a. Au plus fort reste*** Le tableau ci-dessus fait apparaître le quotient de Hare et les quotients entiers, puis les restes. Il reste 5 sièges à attribuer : La Marne, le Loir et Cher, la Saône et Loire, l'Essonne et la Côte d'Or en bénéficient. Deux départements « gagnent » un député, la Haute-Garonne et l'Essonne, deux en « perdent » un, l'Orne et la Guadeloupe.

b. À la plus forte moyenne Il reste toujours 5 sièges à pourvoir. Les plus fortes moyennes sont 114 (Marne et Essonne), 111,2 (Saône et Loire), 110,67 (Loir et Cher) et 108,25 (Haute-Garonne). Par rapport à la répartition légale, la Côte d'Or perd un siège ainsi que l'Orne et la Guadeloupe, tandis que l'Essonne en gagne un et la Haute-Garonne deux.

Partie B

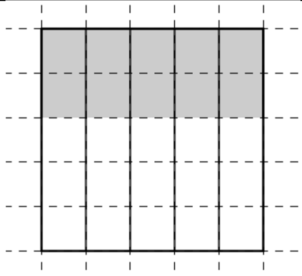
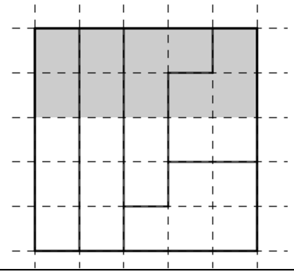
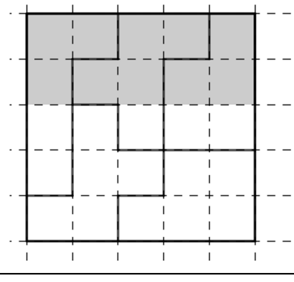
1. Le quotient de Hare est $\frac{216}{8} = 27$. Le tableau ci-dessous donne la répartition des sièges au plus fort reste.

	Nb voix	Nb sièges	Reste	Définitif
Liste A	91	3	10	3
Liste B	87	3	6	3
Liste C	38	1	11	2

2. Le quotient de Hare est cette fois $\frac{216}{9} = 24$. La liste A obtient 3 sièges, reste 19, la liste B 3 sièges, reste 15, la liste C 1 siège reste 14. Les deux sièges restant à attribuer vont aux listes A et B, et C n'a pas 2 sièges comme dans la première répartition. Contrairement aux idées reçues, la méthode ne fournit pas une fonction croissante…

Partie C

Voici trois exemples.

Majorité blanche partout	Trois majorités blanches	Trois majorités grises
		

Exercice 5 Le jeu des six familles

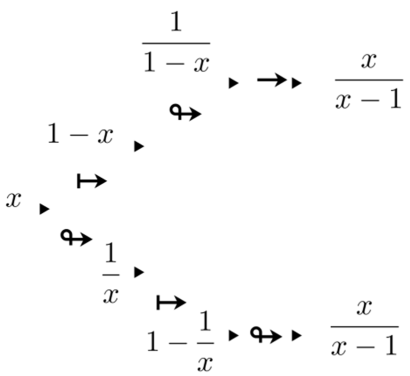
1. À partir d'un nombre x, on trouve les nombres $1-x$ et $\frac{1}{x}$. Si $x = 1-x$, c'est que $x = \frac{1}{2}$, et alors $\frac{1}{x} = 2$, voilà deux éléments. Si $= \frac{1}{x}$, c'est que $x = 1$ ou $x = -1$, et alors $1 - x = 0$ ou $1 - x = 2$, qui sont distincts de 1 et de -1. Si $1 - x = \frac{1}{x}$, il vient $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$, cela ne se peut pas.

2. ***a.*** Familles à 2 éléments

Pour que la famille engendrée par x ait exactement deux éléments, il est nécessaire que $x = 1 - x$ ce qui conduit à $x = \frac{1}{2}$, ou que $x = \frac{1}{x}$, ce qui conduit à $x \in \{-1, 1\}$. Le nombre $\frac{1}{2}$ donne naissance à 2, puis -1, cela fait déjà trois éléments. Le nombre -1 conduit à 2, puis $\frac{1}{2}$, … Enfin le nombre 1 conduit à 1 puis 0 qui n'a qu'un successeur, 1. La famille $\{0, 1\}$ est la seule famille à deux éléments.

b. Familles à 3 éléments.

L'étude préalable a fourni l'exemple $\left\{\frac{1}{2}, 2, -1\right\}$. Si on écrit un arbre de succession, dans lequel les deux fonctions sont représentées par des flèches distinctes (deux flèches identiques qui se succèdent renvoient au nombre d'origine, les deux applications étant involutives). Les familles à trois éléments s'écrivent donc :



$\left\{x, 1-x, \frac{1}{1-x}\right\}$, sous la condition que $\frac{1}{x}$ soit égal à x ou à $1-x$, cas déjà éliminé, ou $\left\{x, \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{x}\right\}$, sous la condition que $1 - x$ ne soit pas l'un des trois, cas déjà éliminé également, ou $\left\{x, \frac{1}{x}, 1 - x\right\}$ pourvu que $\frac{1}{1-x}$ et $1 - \frac{1}{x}$ ne soient pas dans les trois. L'examen des cas conduit aux valeurs $0, 1, \frac{1}{2}, 2, -1$. 0 et 1 sont éliminés. La seule rescapée est la famille prise comme exemple, $\left\{\frac{1}{2}, 2, -1\right\}$.

3. Les familles à 4 éléments ou à 5 éléments sont celles issues d'un réel x pour lequel $\frac{x}{x-1}$ est l'un des autres nombres apparaissant dans l'arbre.

$\frac{x}{x-1} = x$ conduit à $x = 0$ ou $x = 2$, $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x}$ n'a pas de solution, $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ conduit à $x = -1$, $\frac{x}{x-1} = 1 - \frac{1}{x}$ conduit à $x = \frac{1}{2}$, et enfin $\frac{x}{x-1} = 1 - x$ n'a pas de solution.

4. L'arbre de succession limite en effet les possibilités à six éléments par famille : on alterne nécessairement les deux applications, et c'est le même nombre qu'on obtient au bout de deux alternances.

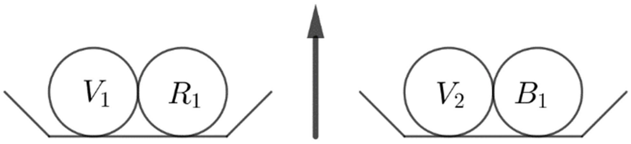
5. La famille $\left\{3, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ comporte exactement six éléments

6. L'application $x \longmapsto 1 - x$ envoie l'intervalle $]a, +\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty, 1 - a[$, tandis que l'application $x \longmapsto \frac{1}{x}$ envoie l'intervalle $]a, +\infty[$, où $a \geq 0$ sur $\left]0, \frac{1}{a}\right[$. Partant d'un nombre de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, on obtient un nombre de l'intervalle $]2, +\infty[$ et un nombre de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, qui donnent un nombre de l'intervalle $]-\infty, -1[$ et un nombre de $]1,2[$, les deux derniers fournissant un nombre de l'intervalle $]-1, 0[$.

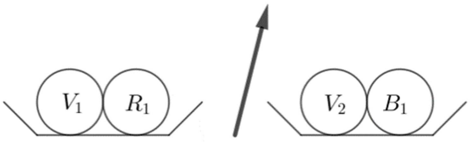
Exercice 6 Boules et Bill

1. Chacune des pesées opposera les deux boules de même couleur. Les plus légères pèsent a, les plus lourdes b.

2. *a.* L'un des plateaux de la balance porte une boule de poids a, l'autre une boule de poids b et chacun une autre boule de poids inconnu, nécessairement une de poids b associée à la boule de poids a et vice-versa. Les poids identiques concernent donc V_1, B_1 et donc R_2 d'une part, V_2, R_1 et B_2 d'autre part.



b. La comparaison des poids d'une boule du premier groupe et d'une boule du second permet de conclure.



3. *a.* Trois situations sont possibles :

- un plateau contient deux boules de poids a et l'autre une de poids a et une de poids b, $(a + a < a + b)$
- un plateau contient deux boules de poids a et l'autre deux boules de poids b, $(a + a < b + b)$
- un plateau contient une boule de poids a et une boule de poids b et l'autre deux boules de poids b
  Dans les trois cas, la boule verte de poids a se trouve dans le plateau « faible ». $(a + b < b + b)$

b. Étudions le cas où le plateau de poids faible contient les boules V_1 et R_1 donc V_1 a pour poids a.
Il y a donc trois cas pour le couple (R_1, B_1) qui sont donnés dans les deux premières colonnes du tableau suivant :

R_1	B_1	B_2
a	a	b
a	b	a
b	b	a

La pesée entre R_1 et B_2 conduit à trois situations différentes ($a < b$, $a = a$, $b > a$) qui permettent d'attribuer à ces deux boules leur poids.
On raisonne de la même manière (en permutant les lettres a et b) pour le cas où le plateau de poids fort contient les boules V_1 et R_1.