

## Niveau : 5<sup>e</sup>

### Thème : Géométrie du parallélogramme

Cette fiche n'a pas vocation à être un cours clé en main. Elle est un support à la réflexion pédagogique et didactique.

**Questions à se poser avant** de construire sa séquence (constituée de plusieurs séances) sur le thème :

- Quelle introduction ? quel historique ? quelles activités ?
- Quels énoncés mathématiques (définitions, propriétés) à faire écrire par les élèves ?
- Quelle(s) démonstration(s)
- Quels prérequis nécessaires ?
- Quelles traces dans le cahier de cours ?

#### CONTEXTE

Programme officiel : <https://euler.ac-versailles.fr/rubrique43.html>

Le parallélogramme est défini à partir de l'une de ses propriétés : parallélisme des couples de côtés opposés ou intersection des diagonales. L'autre propriété est démontrée et devient une propriété caractéristique. Il est alors montré que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur grâce aux propriétés de la symétrie.

Les propriétés relatives aux côtés et aux diagonales d'un parallélogramme sont mises en œuvre pour effectuer des constructions et mener des raisonnements.

#### Un peu d'étymologie

Le mot parallélogramme vient du grec : « para » = à côté, « allélo » = l'un et l'autre et « gramma » = écriture.

#### Prérequis

Au travers de questions flash, on fait un état des lieux et on réactive les savoirs et savoir-faire des élèves sur :

- la définition et les propriétés de la symétrie centrale (à traiter dans un chapitre en amont) ;
- la notion et la construction de droites parallèles ;

#### Activité rapide : questions flash

QF1

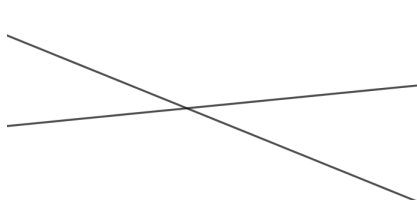


Figure A

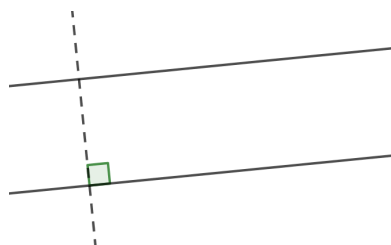


Figure B

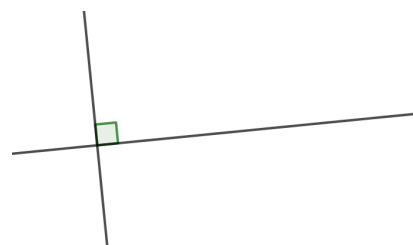


Figure C

Pour chaque figure, préciser si les droites représentées sont parallèles, sécantes, perpendiculaires.

Cette question permet de remettre en tête des élèves des images mentales et quelques propriétés sur les droites parallèles, droites sécantes et droites perpendiculaires.

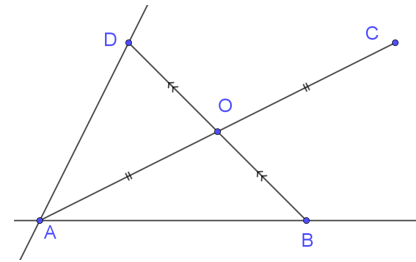
## QF2

Dans la figure ci-contre, donner les symétriques par rapport au point O des points A et B, de la droite (AD) et du segment [OD].

Compléter les phrases :

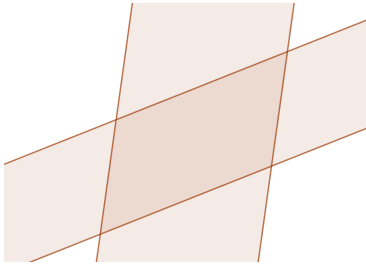
(AD) ... (BC)

OD ... OC.



Cette question permet de réactiver des propriétés de la symétrie centrale.

## Activité d'introduction



A l'aide de deux bandes de papier matérialisant deux paires de droites parallèles, on met en évidence un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles.

Annonce de l'étude de cet objet mathématique d'importance capitale et obtention de quelques conjectures :

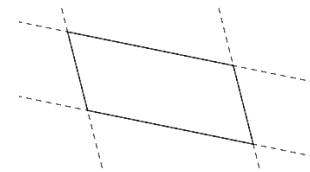
- côtés de même longueur ;
- angles de même mesure ;
- milieu commun des diagonales et centre de symétrie
- 

## Trace dans le cahier de cours

### Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés deux à deux parallèles.

*Une figure est indispensable pour créer une image mentale.*



### Propriété 1 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont même milieu.

*Figure pour illustrer cette propriété.*

### Démonstration

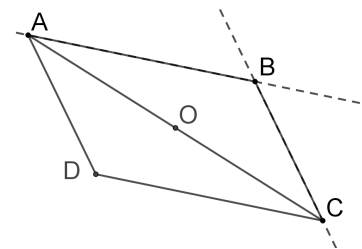
Soit ABCD un parallélogramme et O le milieu de [AC].

En s'appuyant sur la définition de la symétrie centrale, dans la symétrie de centre O, le point A a pour image le point C et le point C a pour image le point A.

La symétrie de centre O transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

Ici la symétrie de centre O envoie donc :

- la droite (AB) sur la parallèle à (AB) passant par C (image de A). Or  $(DC) \parallel (AB)$  car ABCD est un parallélogramme. La droite (AB) est donc envoyée sur la droite (DC), unique droite parallèle à (AB) qui passe par C ;
- de même, la droite (BC) sur la droite (AD) qui est la droite parallèle à (BC) passant par A (symétrique de C) ;
- le point B (intersection de (AB) et (BC)) sur le point D (intersection de (AD) et de (CD)).



On en déduit que O, en plus d'être le milieu de [AC] est aussi le milieu de [BD].

On pourrait démontrer que la réciproque de cette propriété est aussi vraie :

**Propriété 2 (admise) :**

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

*Le regroupement des propriétés 1 et 2 constitue une propriété caractéristique du parallélogramme.*

*De façon générale, une propriété caractéristique d'un objet mathématique consiste en un énoncé d'une condition nécessaire et suffisante qui permet de le définir.*

*Voici une autre propriété caractéristique du parallélogramme :*

**Propriété caractéristique :**

- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ce quadrilatère a un centre de symétrie.
- Si un quadrilatère a un centre de symétrie alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

**Définition :**

Le centre de symétrie d'un parallélogramme est appelé centre du parallélogramme.

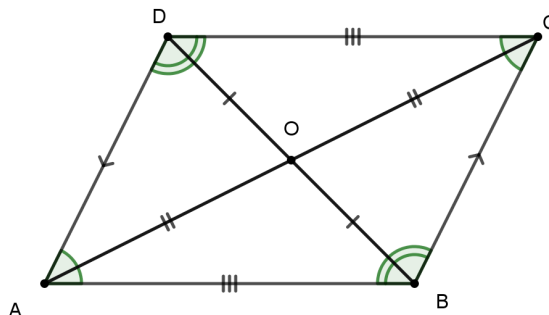
**Propriété :**

Le centre d'un parallélogramme est le milieu commun de ses diagonales.

Figure GeoGebra à construire ou faire construire par un élève

Demande faite aux élèves (*éventuellement en groupe à leur place pour une mise en commun ensuite*) de :

- codage sur les diagonales avec segments de même longueur ;
- codage sur les côtés avec segments de même longueur (en détaillant alors l'image du segment [AB] qui est le segment [CD] et l'image du segment [BC] qui est le segment [AD], et en évoquant la conservation des distances par une symétrie centrale) ;
- codage sur les mesures d'angles opposés (en détaillant de même sur la figure et en évoquant la conservation des mesures d'angles par une symétrie centrale) pour aboutir à la figure suivante :



**Propriété (admise) :**

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur.

Les angles opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même mesure.

**Tracé d'un parallélogramme**

Faire évoquer par les élèves la construction à l'aide d'une règle et d'une équerre, de droites parallèles pour construire un parallélogramme et mise en évidence de l'intérêt de la dernière propriété pour une méthode bien plus rapide de tracé d'un parallélogramme, à l'aide du compas.

## Exercices d'application

**Exercice 1 :** Soit EFGH un parallélogramme tel que  $HG = 6$ ,  $HF = 8$  et  $\widehat{HEF} = 50^\circ$  et soit I le point d'intersection des segments [HF] et [EG].

Déterminer les longueurs EF et HI ainsi qu'une mesure de l'angle  $\widehat{HGF}$ .

(en demandant de commencer par faire une figure à main levée)

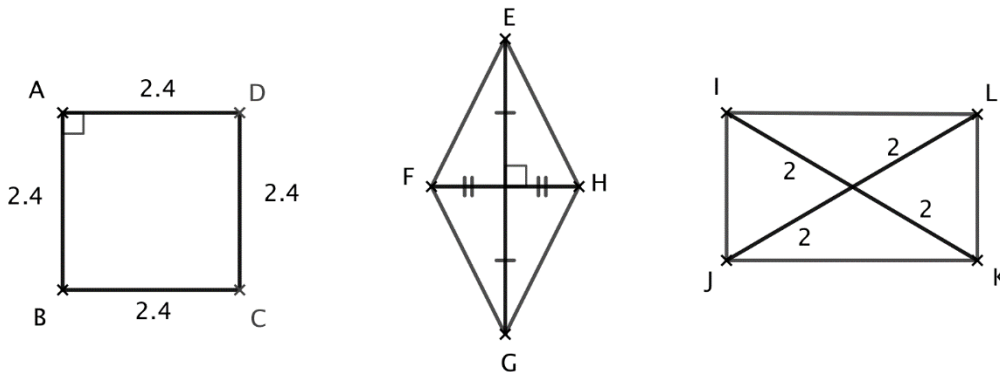
**Exercice 2 :** Soit ABCD un parallélogramme de centre I et soit E un point du plan et F son symétrique par rapport à I.

Montrer que le quadrilatère AECF est un parallélogramme.

(en demandant de commencer par faire une figure à main levée)

## Parallélogrammes particuliers

Les figures ci-dessous sont-elles des parallélogrammes, pourquoi ?



Cet exercice permet de :

- réviser les quadrilatères vus en sixième : carré, losange, rectangle ;
- remarquer que chacun de ces quadrilatères est bien un parallélogramme.

## Pour revoir la symétrie centrale

[https://euler-ressources.ac-versailles.fr/wims/wims.cgi?session=JM87F389A0.3&+lang=fr&+cmd=reply&+module=adm%2Ftool%2Fglossary&+special\\_parm=mathematics%2Fgeometry%2Ffr%2Fcent\\_symetry&+job=main](https://euler-ressources.ac-versailles.fr/wims/wims.cgi?session=JM87F389A0.3&+lang=fr&+cmd=reply&+module=adm%2Ftool%2Fglossary&+special_parm=mathematics%2Fgeometry%2Ffr%2Fcent_symetry&+job=main)

## Pour retenir les parallélogrammes particuliers

<https://maths.ac-noumea.nc/spip.php?rubrique127>