Le bulletin de l'APMEP - N° 547

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2023

Suites

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Un jeu entre amis pas si anodin

À chaque établissement son labo de maths ! L'équipe du lycée François Couperin de Fontainebleau nous décrit le fonctionnement du leur. Il est réjouissant de voir comment le travail en équipe permet de créer des activités pour les élèves pour ensuite analyser leurs productions et faire des mathématiques un peu plus poussées entre collègues.

Vincent Billoud, Fabrice Richard & Charlotte Vulliez

Présentation du labo de maths

Le lycée François Couperin compte environ 1 600 élèves. Il comporte des BTS et deux classes préparatoire ECG (Économique et Commerciale, voie Générale). L'équipe de maths est composée de 12 professeurs.

Notre labo existe depuis juin 2019, il est composé aujourd'hui de huit membres permanents : six professeurs du lycée, une ancienne collègue maintenant référente « Laboratoire de mathématiques » pour la Seine et Marne et un ancien collègue qui travaille dans un collège voisin. Les autres membres de l'équipe de maths participent ponctuellement au laboratoire.

Un collègue est désigné « chef du labo » c'est-à-dire coordonnateur. Plutôt impliqué au niveau du lycée, il apporte des idées et impulse une dynamique tout comme les autres membres du labo. Il y a également une coordonnatrice, très impliquée dans la liaison collège-lycée, mais aussi dans un travail approfondi avec les RMC (Référents Mathématiques de Circonscription).

Nous avons depuis cette année une salle dédiée au labo dans laquelle nous nous retrouvons tous les vendredis de 15 h 30 à 17 h 30.

Voici ce qui nous occupe en ce moment :

Échanges sur nos pratiques

Les approches d'une notion peuvent être très différentes et nous sommes au sein de l'équipe très complémentaires. Nous sommes en constante réflexion et nous retrouver permet d'échanger sur nos pratiques et ainsi de les enrichir.

Créations de ressources

Nous élaborons des exercices à réaliser en début de séance avec leurs corrigés et des fiches de travail en autonomie. Nous réfléchissons aussi à des activités de découverte d'une notion, des exercices passerelles (qui peuvent être traités de manières complémentaires sur plusieurs niveaux). Récemment, nous avons commencé à rédiger de petits articles en partant de questions provenant directement de notre pratique. Par exemple : « *Déterminer, à partir des coordonnées de ses sommets, la nature exacte d'un quadrilatère ressemblant à un carré* » pour un travail en géométrie repérée en Seconde.

Poursuite d'une liaison collèges-lycées

Cette liaison implique les collèges du secteur et le lycée François Ier, autre lycée de Fontainebleau et fait l'objet de rencontres, d'échanges de pratiques, d'élaboration d'activités en commun, de visites croisées.

Autres évènements mis en place

- Préparation de la *Semaine des mathématiques* en mars 2023.
- Visite d'intervenants pour une formation en didactique.
- Animation d'un *webinaire* l'année passée avec une présentation de nos expérimentations sur l'exploitation des tests de positionnement en Seconde.
- Participation aux Journées Nationales de l'APMEP : on y fait le plein d'énergie !

Atelier « murs pédagogiques »

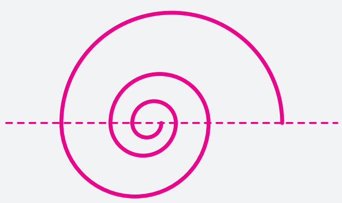
L'atelier « murs pédagogiques » effectué avec une classe de 26 élèves de Terminale, option maths complémentaires, est un atelier dans lequel trois énigmes, indépendantes les unes des autres, sont données aux élèves. Les élèves sont répartis en groupes de trois à quatre élèves. Chaque groupe a une énigme et y réfléchit pendant vingt minutes. Ensuite, les groupes changent d'énigme à l'exception d'un élève de chaque groupe qui devra expliquer le fruit de ses recherches au nouveau groupe arrivant.

Les murs pédagogiques sont mis en place environ une fois par période. Les élèves rédigent ensuite les solutions des énigmes en devoir maison. Puis une correction est faite en classe.

Voici, par exemple, les énoncés de trois énigmes proposées lors d'un atelier :

Spirale

Une spirale est formée par une succession de demi-cercles dont le rayon de l'un est égal aux deux tiers du rayon précédent.
Le rayon du premier demi-cercle est 2 cm.
La longueur de la spirale peut-elle dépasser 15 cm ? 20 cm ?



Au zoo

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que si le manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne ensuite est 0,3 ; s'il a choisi le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne ensuite est de 0,8. Au premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Que dire du comportement du manchot à long terme ?

Jeu entre amis

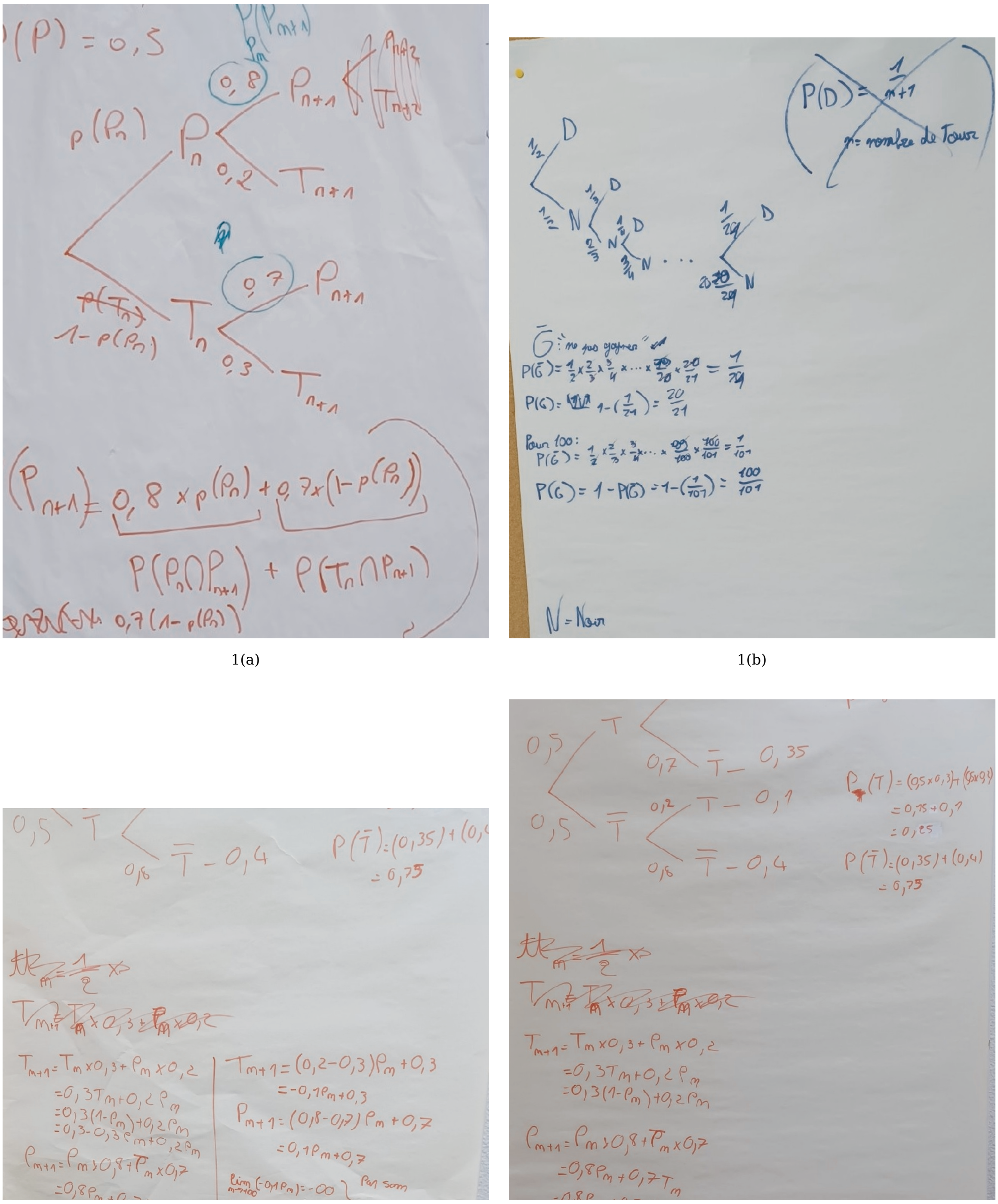
Lors d'une fête, Vincent propose à ses amis un jeu de hasard.
Il leur présente un sac opaque contenant une bille noire et une bille dorée et explique le principe du jeu : *« Si vous piochez la bille dorée, vous avez gagné, sinon, vous remettez votre bille et je rajoute une bille noire dans le sac. »*

- Vincent dit qu'il ne dispose que de vingt billes noires et une dorée. Évaluez les chances d'un ami de gagner à ce jeu.
- Fabrice dit : *« Si tu as au moins cent billes noires, je suis sûr de gagner ! »* A-t-il raison ?

Zoom sur « Jeu entre amis »

Les élèves ont tous représenté la situation par un arbre pondéré avec $n = 100$ sauf un groupe qui a éprouvé des difficultés à calculer la probabilité de gagner même dans le cas $n = 20$. Nous leur avons ensuite demandé d'exprimer cette probabilité dans le cas général : « *Et pour plus de* 100 *billes ?* » Ils ont donc tous trouvé l'expression en fonction de n.

La notion de limite de suites ayant déjà été traitée, les élèves ont tous pensé au passage à la limite pour répondre au problème. Dans les devoirs maison, cependant, le calcul de cette limite n'était pas bien justifié, s'agissant effectivement d'une forme indéterminée. Lorsque j'ai rendu les copies, j'ai mis en lumière ce problème et je leur ai demandé de justifier que cette limite était égale à 1.



1(a) 1(b)

1(c) 1(d)

Figure 1. *Quelques productions d'élèves.*

« Et si on rajoutait deux billes ? »

Dans la continuité de cette énigme, nous nous sommes demandé ce que l'on obtiendrait si l'on rajoutait deux billes au lieu d'une avant chaque tirage. . . Un objectif de notre labo est d'entretenir nos connaissances mathématiques. Voici le fruit de nos recherches.

Considérons les événements :

B_i : « On tire une bille noire au i-ème tirage, $i \in \mathbb{N}^*$ » ;

G_n : « On gagne en n tirages au plus ».

La probabilité de chaque événement B_i est

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(B_i) = 1 - \frac{1}{2i} = \frac{2i-1}{2i}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P(\overline{G_n}) &= P(B_1) \times \ldots \times P(B_n) \\ &= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous avons rassemblé nos souvenirs sur la formule de Wallis :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \ldots \times (2n) \times (2n)}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette formule nous a d'abord fait penser abusivement que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \ldots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \ldots},$$

ce qui nous a amenés au fait que :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n+2)}$$

tendrait vers $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ et que l'on ne serait donc pas quasi-certain que le jeu se termine !

Nous avons alors effectué le calcul pour de grandes valeurs de n en `Python` et le résultat a contredit notre conjecture.

Malgré tous les avertissements de nos chers profs de prépa sur la sommation de termes de séries semi-convergentes, nous étions tombés dans un piège analogue sur les produits infinis.

Il fallait donc être plus précis.

En posant $w_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$, on a

$$\begin{aligned} \left[P(\overline{G_n})\right]^2 &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right)^2 \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 4k^2} \\ &= \frac{1}{w_n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Donc $\left[P(\overline{G_n})\right]^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\pi}$, et finalement

$$P(\overline{G_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Pendant qu'une partie de l'équipe écrivait laborieusement cette démonstration, l'autre partie optait pour l'utilisation de la formule de Stirling :

$$n\,! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

En remarquant que $P(\overline{G_n}) = \dfrac{(2n)!}{(2 \times 4 \cdots \times 2n)^2}$

on en déduit : $P(\overline{G_n}) = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

Or $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$, donc $P(\overline{G_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

La probabilité de gagner sur le long terme à cette variante du jeu tend donc également vers 1.

Pour conclure : comme nos élèves, nous avons cherché, nous nous sommes trompés, nous avons profité des connaissances plus expertes de certains d'entre nous pour résoudre l'énigme. Il est très enrichissant de redevenir élève et de prendre collectivement le temps de faire des mathématiques.

Vincent Billoud, Fabrice Richard et Charlotte Vulliez sont professeurs de mathématiques au lycée François Couperin de Fontainebleau (77).

vincent.billoud@ac-creteil.fr
frichard1e4@gmail.com
vulliez.charlotte@yahoo.fr

Sommaire du nº 547

Suites