|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | pissarro.png  Lycée Camille Pissarro Pontoise | C:\Documents and Settings\pmichalak\Mes documents\Mes images\logo_INRIA.png | Lycée La Bruyère Versailles |
| « Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. » Jean le Rond D’Alembert *Institutiones calculis differentialis* 1755 | | |

***Stage ouvert aux élèves de terminale scientifique***

***présentés au Concours général des lycées - 6 et 7 février 2017***

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***

**« La vérité n’est pas pour le *philosophe* une maîtresse qui corrompe son imagination, et qu’il croie trouver partout ; il se contente de la pouvoir démêler où il peut l’apercevoir. Il ne la confond point avec la vraisemblance ; il prend pour vrai ce qui est vrai, pour faux ce qui est faux, pour douteux ce qui est douteux, et pour vraisemblable ce qui n’est que vraisemblable. Il fait plus, et c’est ici une grande perfection du *philosophe*, c’est que lorsqu’il n’a point de motif propre pour juger, il sait demeurer indéterminé. »**

**Extrait de l’article « Philosophe » de l’Encyclopédie (article écrit par César Chesneau Dumarsais)**

La Pépinière académique de mathématique organise pour la dixième année, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, cette année le collège Jean-Philippe Rameau et le lycée La Bruyère de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, ce qui est nécessairement le cas pour le stage réservé aux candidats désignés pour le Concours général.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD,Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Thierry ICHELMANN, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Yoan LEE (Lycée Hoche, VERSAILLES), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Philippe TOUSCH (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS)

**Professeurs accompagnants :** Adriana BOHE (Lycée Blaise Pascal, ORSAY), Mariane BOURGOIN (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Mathilde BOUCHER (Lycée Rosa Parks, MONTGERON)

***Emploi du temps***

**Lundi 6 février 2017**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Pontoise** | **Versailles 1** | **Versailles 2** | **Versailles 3** |
| **De 10 à 11** | **Film Le dernier théorème de Fermat (Réalisateur *Simon Singh*)** | | | |
| **De 11 à 12.40** | **Nombres** | **Nombres**  **MA+PT** | **Équations**  **YL+TI** | **Fonctions**  **SM** |
| **De 12.40 à 13.15** | **Repas** | **Repas** | | |
| **De 13.15 à 14.50** | **Équations** | **Fonctions**  **SM** | **Nombres**  **MA+PT** | **Équations**  **YL+TI** |
| **De 14.55 à 16.30** | **Fonctions** | **Équations**  **YL+TI** | **Fonctions**  **SM** | **Nombres**  **MA+PT** |

**Mardi 7 février 2017**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Pontoise** | |  | **Versailles** | | 1 | 2 | 3 |
| **De 10 à 11** | **D’Alembert** |  | **De 10 à 11.45** | **Angles et distances**  **CW** | | **Dénombrement**  **CD** | **Suites**  **NF** |
| **De 11 à 12.40** | **Angles et distances** |  | **De 11.45 à 12.20** | **Repas** | | **Repas** | **Repas** |
| **De 12.40 à 13.15** | **Repas** |  | **De 12.20 à 14.00** | **Suites**  **NF** | | **Angles et distances**  **CW** | **Dénombrement**  **CD** |
| **De 13.20 à 14.55** | **Suites** |  | **De 14.05 à 14.50/15.40** | **Dénombrement**  **CD** | | **Suites**  **NF** | **Angles et distances**  **CW** |
| **De 14.55 à 16.30** | **Dénombrement** |  | **De 15.45/14.55 à 16.30** | **D’Alembert** | | | |
|  |

**Nombres**

**1. 2 017**

Le nombre s’écrit dans le système décimal avec trois chiffres différents de 0. Cinq autres nombres s’écrivent avec les mêmes chiffres placés dans un ordre différent. La somme de ces cinq nombres est 2 017. Trouver .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| enisagé |  | final |
| 10 | 203 | 5 |
| 11 | 425 | 11 |
| 12 | 647 | 17 |
| 13 | 869 | 23 |

Appelons les chiffres composant ,

de sorte que .

On a donc : . Comme est compris entre 111 et 999, il vient que est compris entre 2 128 et 3 016. Par conséquent, cela laisse pour la somme quatre possibilités : 10, 11, 12 et 13. Cette condition est nécessaire. On essaie ces possibilités dans le tableau ci-contre, et on voit que est la seule solution.

**2. Progression arithmétique, progression géométrique**

Quels sont les triplets constitués de nombres entiers s’écrivant dans le système décimal avec trois chiffres, et tels que soient en progression arithmétique et soient en progression géométrique.

Les conditions énoncées se traduisent par et .

Il s’ensuit que :, puis que . Et donc est un carré parfait.Il existe un entier tel que (raisonner sur les exposants de 2 et 5 dans la décomposition en produit de facteurs premiers). On écrit donc : . Ce qui donne . est inférieur à 1 000, donc est inférieur ou égal à 4. Comme est supérieur à 100, est supérieur ou égal à 4. Donc et

**3.**

On considére l’ensemble des rationnels qui sont sommes d’un rationnel positif et de son inverse : pour tout élément de , il existe un rationnel positif tel que .

***a.*** Pour tout entier , montrer que les propositions «  est la somme de deux éléments de  » et «  est le produit de deux éléments de  » sont équivalentes.

***b.*** Montrer qu’il existe une infinité d’entiers positifs qui ne sont pas sommes d’éléments de .

***c.*** Montrer qu’il existe une infinité d’entiers positifs qui sont sommes d’éléments de .

***a.*** Commençons par considérer un produit de deux éléments de  : s’écrit aussi :

. Ce qui prouve que tout « produit » est une « somme » (la question de savoir si est entier ne se pose pas).

Dans l’autre sens, considérons une « somme » dans laquelle et d’une part, et d’autre part, sont premiers entre eux. On peut encore écrire . Si est entier, le numérateur des un multiple du dénominateur, ce qui donne séparément est un multiple de et est un multiple de . En effet, est premier avec (même chose pour et ). Il s’ensuit que . En remplaçant

par , on obtient , c’est-à-dire que est un « produit » du type voulu.

***b.*** Utilisons l’équivalence précédente et raisonnons sur le produit. Avec les mêmes conventions que précédemment, . Observons que les sommes de deux carrés ne sont des multiples de 4 que dans le cas où les nombres à élever au carré sont tous les deux pairs (ce qui est exclu pour des nombres premiers entre eux). Aucun des deux facteurs du numérateur n’est multiple de 4. ne peut donc être multiple de 8, ce qui obligerait l’un des deux à être multiple de 4.

***c.*** Cherchons des entiers et tels que soit un entier (c’est plus fort que ce qui est demandé). Le couple convient et donne En observant que , il vient que dans les couples cherchés, est multiple de et multiple de . Dans l’égalité précédente, remplaçons par et par . Le nombre . Or, divise et divise aussi . Donc ce nombre est aussi un entier. On voit qu’à partir d’une solution , on peut construire une suite de solutions en remplaçant à chaque étape par . Les premiers nombres obtenus sont 5, 13 et 68.

**4. Des entiers cachés dans des développements décimaux**

On note l’ensemble des inverses des entiers naturels non nuls, et on s’intéresse à l’écriture décimale des éléments de . Pour ceux de ces nombres qui sont des décimaux, on limitera l’écriture au minimum : 0,5 et pas 0,500, et encore moins 0,499999…

**1.** Parmi les éléments de , caractériser les décimaux.

**2.** Les éléments de qui ne sont pas des décimaux ont une écriture décimale périodique. Ainsi, l’écriture décimale de peut-elle être notée , ce qui signifie que la séquence de chiffres 142857 se répète indéfiniment à l’identique. De même, ou . Donner, pour chaque entier , compris entre 1 et 9, le plus petit entier tel que apparaisse dans le développement de .

**3.** Dans l’écriture décimale de l’inverse d’un entier naturel , on peut trouver une suite de chiffres utilisés dans le même ordre et **sans omission** dans l’écriture d’un entier . Par exemple, dans l’écriture de , on trouve 142, 857, 285, etc. Un entier étant donné, s’il y a des nombres dont la suite des décimales de l’inverse fait apparaître (intégralement), le plus petit d’entre eux est appelé *ordre de .*

***a.*** Vérifier que l’ordre de 28 est 7, et que l’ordre de 33 est 3.

***b.*** Déterminer les ordres de 11, 12, 14, 15, 16 et 19.

**4.** *Dans cette question, on suppose que tout entier naturel non nul possède un* ordre (au sens défini dans la question **3.**). On souhaite fabriquer un algorithme permettant de calculer l’ordre de tout entier naturel inférieur à 1 000. Trois fonctions y seront utilisées :

− La fonction teste le caractère décimal de l’inverse d’un entier. Elle prend donc les valeurs 1 (si cet inverse est décimal) et 0 (si cet inverse n’est pas décimal)

− La fonction donne la liste ordonnée des chiffres apparaissant dans l’écriture décimale de tout élément décimal de . Par exemple, , et

− La fonction donne la liste ordonnée des chiffres apparaissant dans l’écriture décimale de tout élément non décimal de , limitée au dernier chiffre de la troisième apparition de la partie périodique. Par exemple : et

***a.*** Que sont et  ?

***b.*** Écrire un algorithme approprié.

**5.** En remarquant que , on déduit que , puis que

***a.*** Pourquoi cet encadrement permet-il de montrer que l’ordre de 13 est inférieur à 79 ?

***b.*** Déterminer l’ordre de 13.

**6.** Le nombre 2 017 a-t-il un ordre ?

**1.** Les décimaux sont les quotients d’entiers par des puissances de 10. Si le nombre appartient à , il existe un entier et un entier tels que . En l’occurrence, . Dans ce cas, l’inverse de est un entier seulement si est un diviseur de , ce qui impose que 2 et 5 soient les seuls diviseurs premiers de . Les décimaux de sont donc les inverses de produits de puissances de 2 par des puissances de 5.

**2.** Écrivons les développements des inverses des premiers entiers :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 1 | 0,5 | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,16 | 0,142857 | 0,125 | 0,1 |

On constate que 1 est apparu pour la première fois dans le développement de 1, 2 dans celui de 4, 3 dans celui de 3, 4 dans celui de 7, 5 dans celui de 2, 6 dans celui de 6, 7 dans celui de 7, 8 dans celui de 7. On n’a pas (encore) trouvé 9 dans ces développements, mais . C’est aussi la première fois qu’on trouve un 0 **après** la virgule.

**3. *a.*** Ordre de 28 : nous avons vu apparaître 28 dans le développement de 1/7 et pas avant. Nous avons vu apparaître 33 dans le développement de 1/3 (cela se joue sur deux périodes, mais la définition ne l’interdit pas).

***b.*** D’autres ordres : nous avons vu apparaître 11, sur deux périodes, dans le développement de 1/9, 12 dans le développement de 1/8, 14 dans le développement de 1/7, 16 dans celui de 1/6. En cherchant plus loin, on trouve 15 dans le développement de , et 19 dans le développement de

**4. *a.*** et

***b.* Voir en annexe**

**5. *a.*** On a . Les inverses des entiers compris entre 70 et 80 diffèrent l’un du suivant de moins de 0,0005. L’un au moins d’entre eux commence par 0,013 (en fait cela est vrai pour 71, 72, 73, 74 et 75). L’ordre de 13 est donc inférieur à 71.

***b.*** L’ordre de 13 est 23. Il n’y a pas de moyen de le prouver autrement que de faire la liste (comme le propose l’algorithme) des entiers « issus » des développements des inverses des entiers de à 23.

***c.*** On peut tenter une démarche analogue et parvenir à l’encadrement : , qui conduit à découvrir que 2017 a donc un ordre, qui est donc inférieur ou égal à 4 956.

*Remarque :* on vient de voir, avec 13, que la méthode conduit à chercher un développement décimal commençant (aux 0 près) par le nombre entier dont on cherche s’il a un ordre. Naturellement, l’entier pourrait apparaître « plus loin » dans les développements…

**Annexe**

Considérons un nombre possédant chiffres :

Le quotient est supérieur à 1 et strictement inférieur à 10. Appelons la partie entière de ce quotient ( est un nombre entier compris entre 1 et 9, donc un chiffre). On a :

, ou encore . Divisons par 10 :

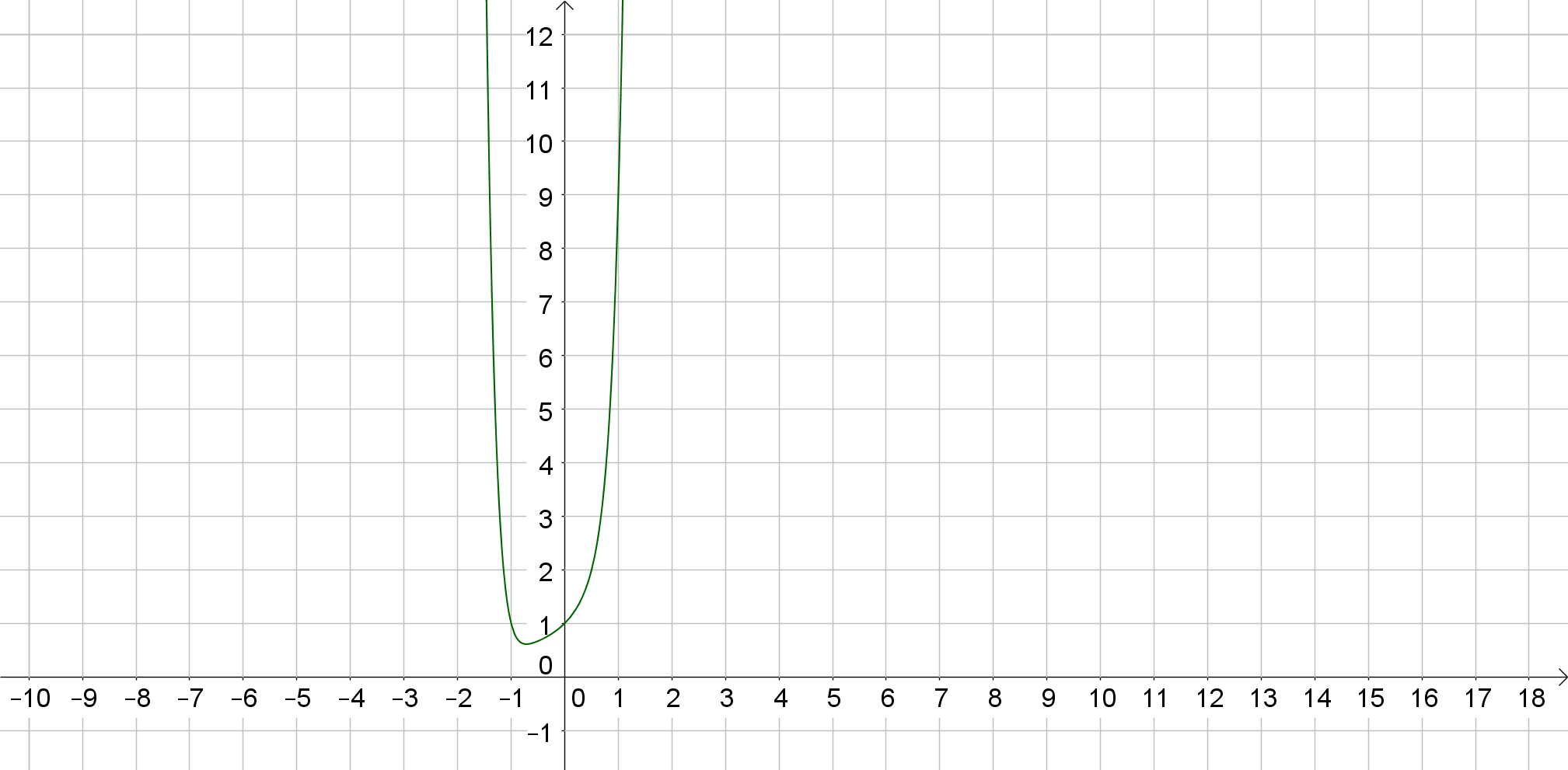
**Fonctions**

**1. Tous les grands ont été petits**

À tout entier , on associe la fonction définie sur **R** par

On appelle le minimum de la fonction . Montrer que, pour tout ,  ;

Question subsidiaire : Quelle est la limite de ce minimum lorsque augmente ?

****On peut commencer par faire quelques essais, qui donnent des représentations graphiques ressemblant à celle-ci.

On note qu’en effet, quel que soit , . La décomposition :

conduit à

Le deuxième terme de cette somme a le signe de , et donc la fonction ne prend des valeurs inférieures à 1 que sur l’intervalle et pas ailleurs.

En utilisant la forme synthétique, (somme d’une suite géométrique, pour comme est impair,

Le minimum est inférieur à toute valeur prise par sur . Voyons ce qui se passe pour l’image de  : . On termine grâce aux limites classiques de la famille . Et on trouve bien que la limite du minimum est .

**2. Plafond de verre**

On considère une fonction polynôme de degré 3 unitaire (son terme de degré 3 a pour coefficient 1) telle que et telle que l’équation possède trois solutions réelles positives (au sens large, c’est-à-dire comptées avec leur ordre de multiplicité). Quelle est la valeur maximale prise par ?

Appelons les solutions de l’équation . On peut écrire, pour tout ,

. D’où

On se souvient de l’identité : (Olympiades 2016) qui permet d’établir que pour tous  positifs : et .

Il vient donc : . Donc .

Ce maximum est obtenu pour

**3. Partie entière**

Pour triplet de réels strictement positifs, on pose , où désigne la fonction partie entière. Quel est le minimum de la fonction ?

Essayons la minoration : pour tout , . On obtient , qui s’écrit aussi

Pour tout réel strictement positif , on a : (car .

Par conséquent .

Et comme est un entier, on en déduit que, pour tout ,

4 est en effet un minimum, puisque .

**4. « Toutes » les fonctions trigonométriques**

On considère la fonction définie sur par

. Quel est le minimum de la fonction ?

Posons et On a , ou encore , en tenant compte du fait que . Posons (notons que ). Avec cette nouvelle notation . Le nombre prend toutes les valeurs de . Le minimum est atteint en et vaut .

**5. Une équation fonctionnelle**

Trouver toutes les fonctions de **N** dans **N** pour lesquelles, quels que soient les entiers :

On commence classiquement par se préoccuper de Appelons ce nombre. Prenons . Il vient : .

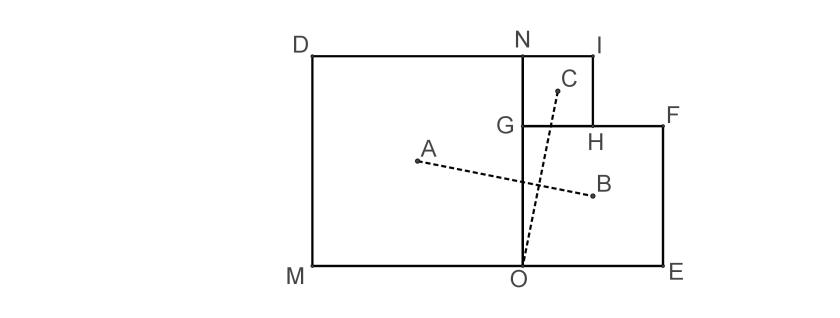
Calculons alors . Finalement,

On a donc, pour tout , .

Appliquons aux deux membres de l’égalité de départ : . Il vient donc, grâce au dernier résultat :

Posons . On établit (par récurrence si on veut) que pour tout  : . Mais on a établi que , d’où il vient : pour tout , . Finalement et est l’identité.

**Angles et distances**

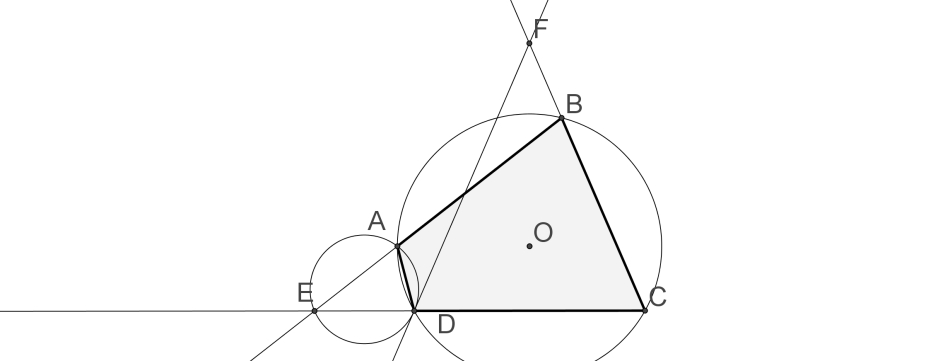
**1. Mise en jambes 1**

Les trois carrés de la figure ci-contre ont pour côtés . Ils ont pour centres A, B et C. Montrer que les segments [OC] et [AB] ont même longueur et sont perpendiculaires.

[AB] et [OC] sont les hypoténuses de triangles rectangles de côtés et . Leur longueur commune est donc .

On peut calculer un produit scalaire ou comparer des pentes : celle de (OC) est . Celle de (AB) est .

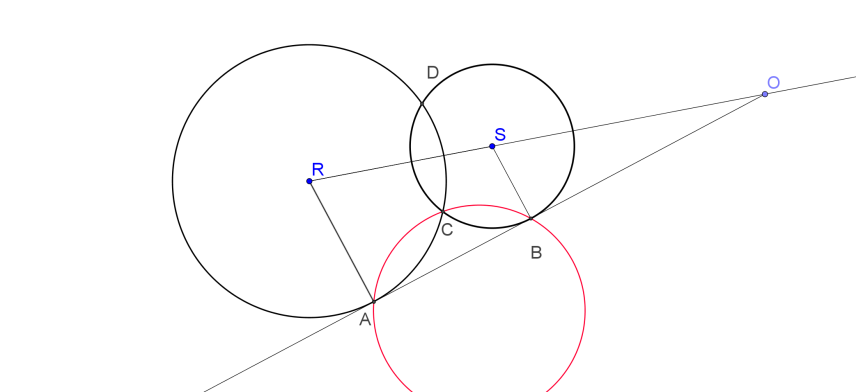
**2. Mise en jambes 2**

On donne des points A, B, C et D, dans cet ordre, sur un cercle de centre O. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E. La tangente en E au cercle circonscrit au triangle AED coupe (BC) en F. Montrer que le triangle FCD est isocèle.

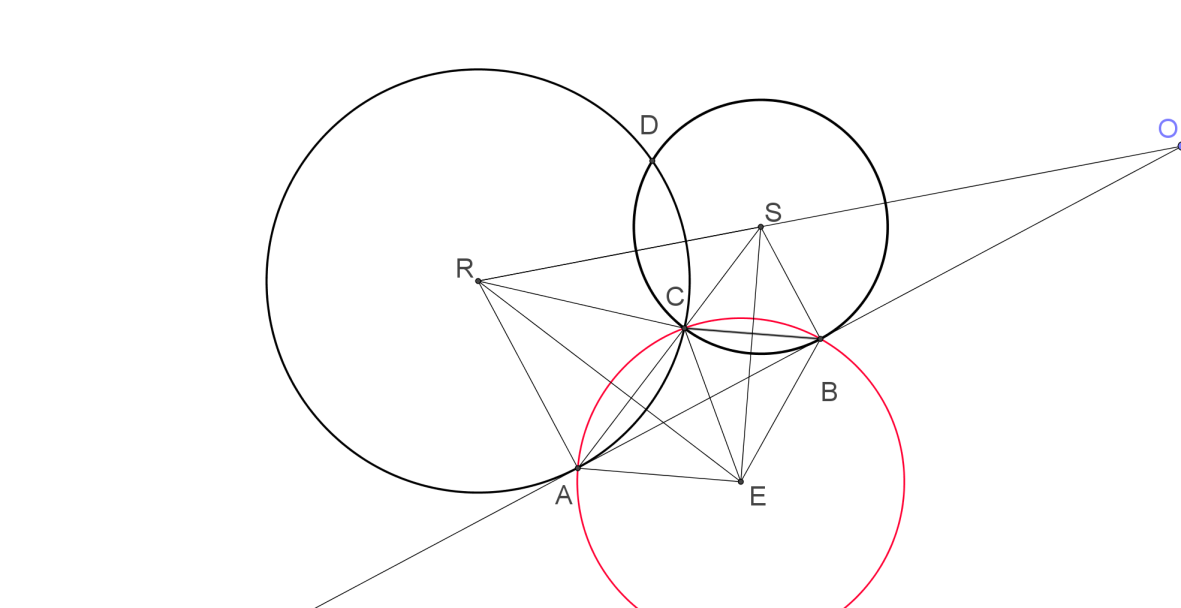
Le théorème de l’angle inscrit permet d’affirmer que .

(angles adjacents, angles interceptant des arcs supplémentaires)

Donc

**3. Une moyenne géométrique… en géométrie**

Un cercle de centre R et de rayon et un cercle de centre S et de rayon ont deux points d’intersection, C et D. Une tangente commune aux deux cercles touche en A et en B. Quel est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ?

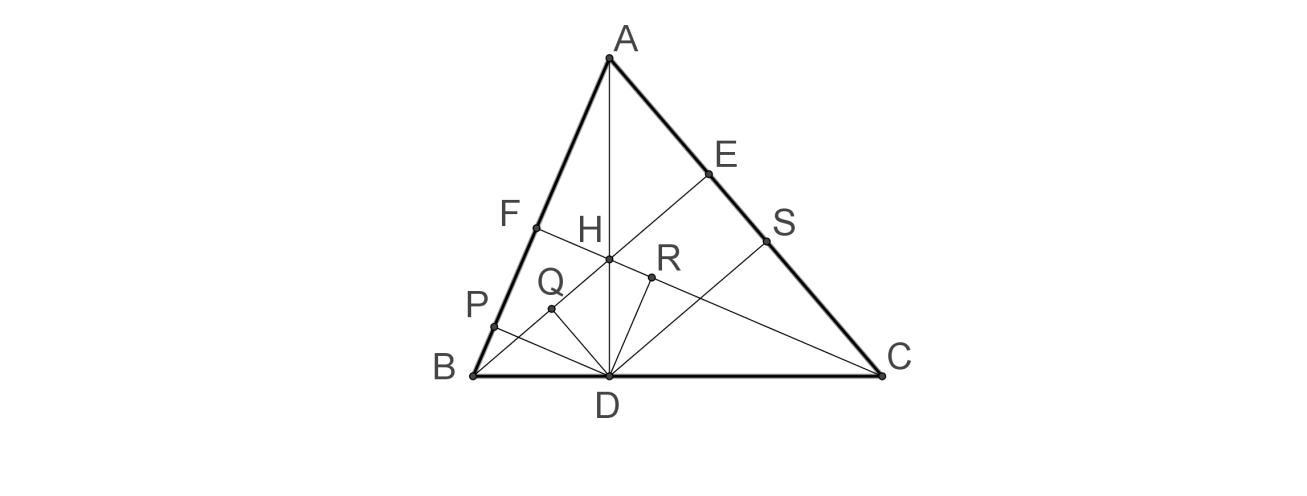


Observons les triangles ARE et CES. L’angle a pour mesure la moitié de la mesure de . Cet anle au centre de intercepte l’arc , qui est aussi intercepté par l’angle (propriété de la tangente). Ce dernier angle intercepte aussi l’arc du cercle .

Et donc . La même démarche conduit à . Les deux triangles ARE et CES ont donc leurs angles de même mesure :ils sont semblables. D’où l’égalité des quotients . En revenant aux notations initiales : , et donc .

Par symétrie par rapport à (RS), on obtient un résultat analogue pour le cercle obtenu avec l’autre tangente commune. Le cercle passant par A, B et D a lui aussi pour rayon .

**4. Alignement**

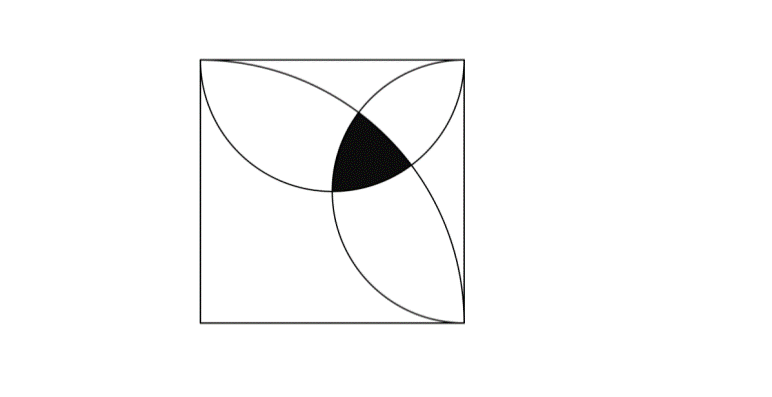
****Dans le triangle ABC, on appelle D, E, F les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C et on appelle P, Q, R et S les pieds des perpendiculaires abaissées du point D respectivement sur les droites (AB), (BE), (CF) et (CA). Montrer que les points P, Q, R et S sont alignés.

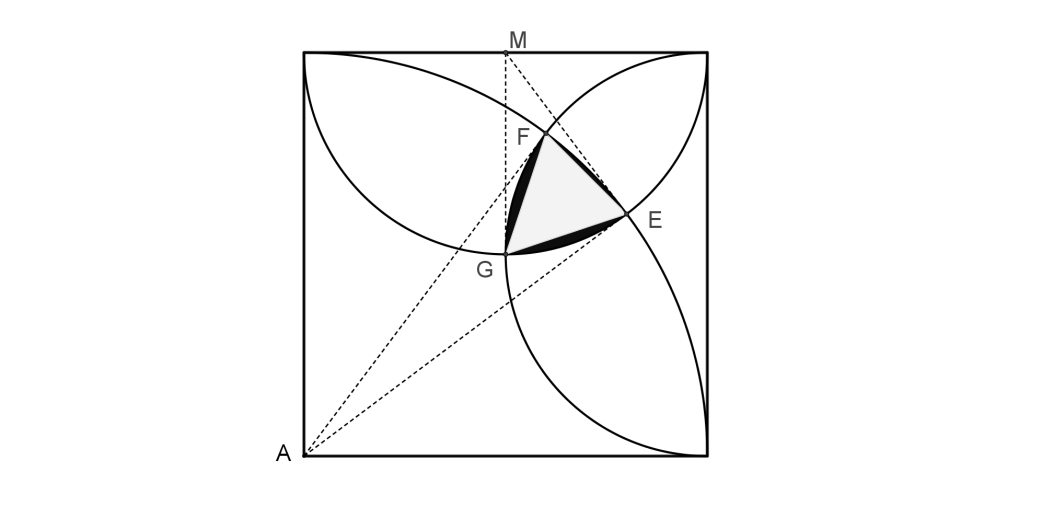
Commençons par observer que les triangles BQD et DSC d’une part, BPD et DRC d’autre part, sont semblables (ce sont des triangles à côtés parallèles). Les triangles BPD et BQD sont inscrits dans un demi-cercle de diamètre [BD], les riangles DRC et DSC dans un demi-cercle de diamètre [DC]. Il s’ensuit notamment que les angles inscrits et , respectivement égaux à et , sont égaux. D’où on déduit que les droites (PQ) et (SR) sont parallèles.

Un supplémentaire de est (toujours les angles inscrits) et un supplémentaire de est .

Mais l’angle est égal à l’angle en A du triangle ABC (observer les triangles DHR et AHF). Par conséquent les droites (SR) et (PQ) « portent » le côté [QR] du triangle DQR. Les points P, Q, R et S sont alignés.

**5. Maison de la culture**



****La nouvelle Maison de la culture, qui fera la part belle à la culture scientifique, a son logo. Il sera reproduit en grand sur la façade : dans un carré de côté 10 m, deux demi-cercles dont deux côtés consécutifs du carré sont les diamètres et un quart de cercle centré en le sommet commun aux deux autres côtés délimitent un triangle curviligne dont la surface sera couverte d’une mosaïque. Il s’agit d’en déterminer l’aire.

**1.** On s’intéresse en première approximation à l’aire du triangle dont les sommets sont les points d’intersection des arcs de cercle (autres que leurs extrémités). Quelle est sa valeur ?

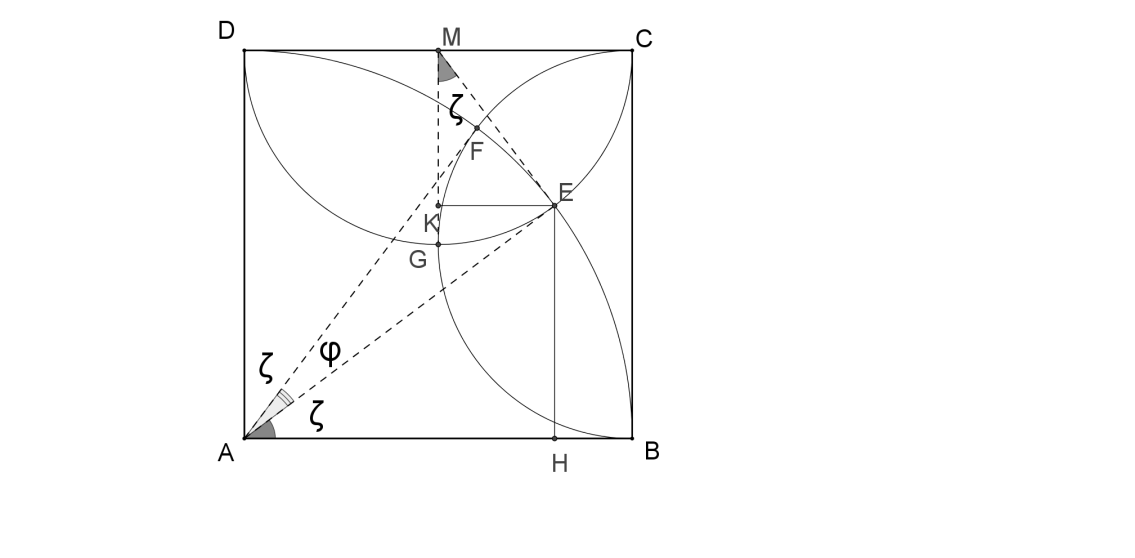
**2.** Il reste à déterminer l’aire de chacun des trois segments circulaires soutenus par les segments [EF], [FG] et [GH] (en noir sur le schéma ci-contre). Pour cela, on pourra commencer par établir, en général, l’aire du segment circulaire déterminé, sur un disque de rayon , par un angle au centre .

**3.** Achever la détermination de l’aire du triangle curviligne. On donnera la valeur arrondie au dm².

**1.** Le sommet G du triangle est le centre du carré. Les sommets F et E sont symétriques par rapport à la diagonale (AG). Le point F est un des deux points d’intersection des cercles d’équations

et . Le système formé par ces deux équations se réduit à . En remplaçant par dans la première équation, on parvient à ou . Les coordonnées de F sont donc (8, 6), et celles de E (6, 8). On peut calculer l’aire de ce triangle en utilisant la formule de Héron. Les mesures des côtés sont : EF = , GE = GF = . Le demi périmètre est donc et le carré de l’aire 16. L’aire du triangle est donc 4m².

**2.** L’aire du secteur circulaire déterminé dans un disque de rayon par un secteur d’angle est la différence entre l’aire du secteur circulaire d’angle et l’aire du triangle isocèle d’angle au sommet et dont les côtés de même longueur mesurent .

Donc (le triangle isocèle est la réunion de deux triangles rectangles d’hypoténuse et dont un angle est .

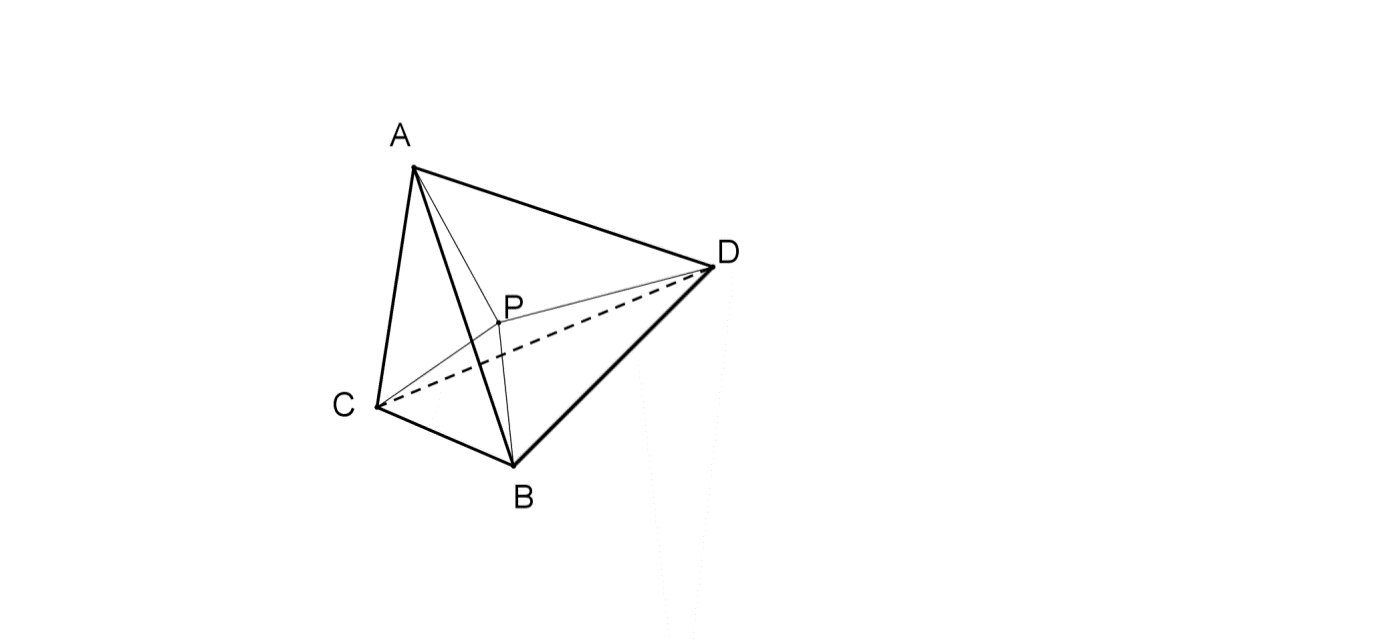
Il s’agit à présent de déterminer les angles utiles. On remarque que les angles marqués ζ ont même mesure (triangles rectangles AEH et MEK semblables et symétrie par rapport à la diagonale (AC)). Leur cosinus est et leur sinus ;

L’aire totale des trois segments circulaires est donc :

Ce qui s’écrit encore :

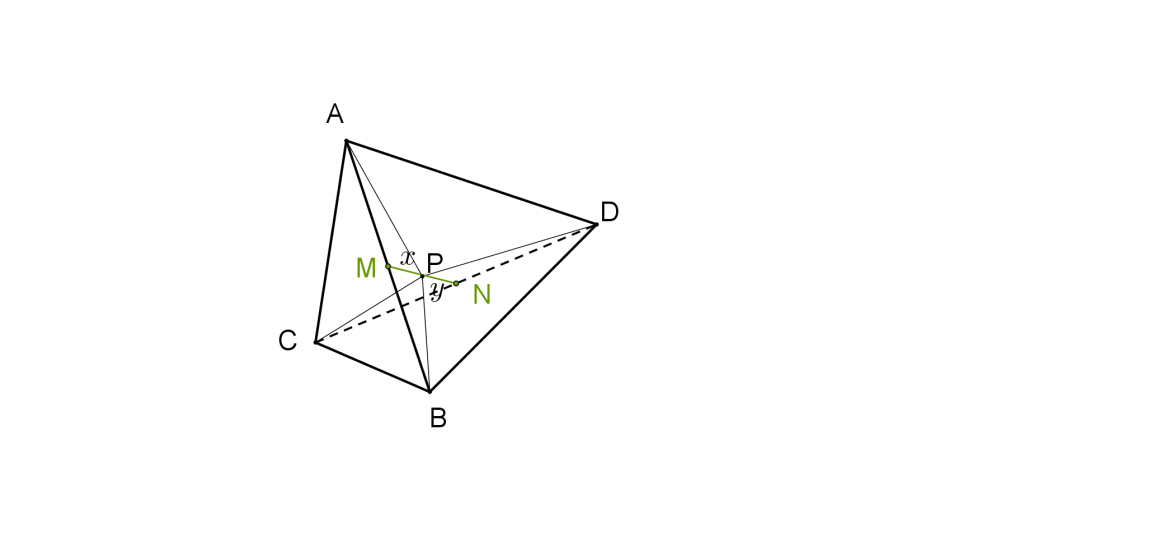
Or,

**3. Finalement,** la valeur arrondie au dm² de l’aire cherchée est 5,28.

**6. L’arête du tétraèdre**

On considère un tétraèdre régulier ABCD pour lequel existe un point P, intérieur au tétraèdre, tel que :

et . Quelle est l’arête de ce tétraèdre ?

L’ensemble des points équidistants de A et B est le plan médiateur de [AB]. Ce plan contient (CD) et le milieu M de [AB]. L’ensemble des points équidistants de C et D est le plan médiateur de [CD]. Ce plan contient (AB) et le milieu N de [CD]. Le point P appartient donc au segment [MN]. Appelons et les distances de P à M et N respectivement et l’arête du tétraèdre. Le triangle ANM est un triangle rectangle dont les côtés de l’angle droit mesurent et et l’hypoténuse . Il vient donc :

. Le triangle PMB est rectangle en M, ses côtés de l’angle droit sont et et son hypoténuse . Il vient donc . De même avec le triangle PNC : . On obtient successivement : ,

donc et . On parvient à l’équation , dont les solutions positives sont 6 et  ; seule 6 convient. Ce qui fournit et .

**Suites**

**1. Somme de termes d’une suite**

On considère un nombre réel tel que et la suite définie par et, pour tout : et . Exprimer en fonction de la somme (Oui, c’est la somme d’une « infinité » de termes, mais ce n’est pas pour autant une somme infinie. On pourra toujours supposer qu’on ne fait que la somme des termes jusqu’à un certain rang et voir s’il est légitime de passer à la limite).

Première observation :

On peut décomposer la somme des en trois parties :

Et revenir à la définition

On trouve donc :

Et

En revenant à la question posée :

**2. Somme d’inverses**

Le nombre est tel que soit un entier positif. Montrer que tous les termes de la suite définie par sont des entiers positifs. Dire lesquels, parmi ces termes, sont des multiples de .

Considérons un entier supérieur à 1 et exprimons .

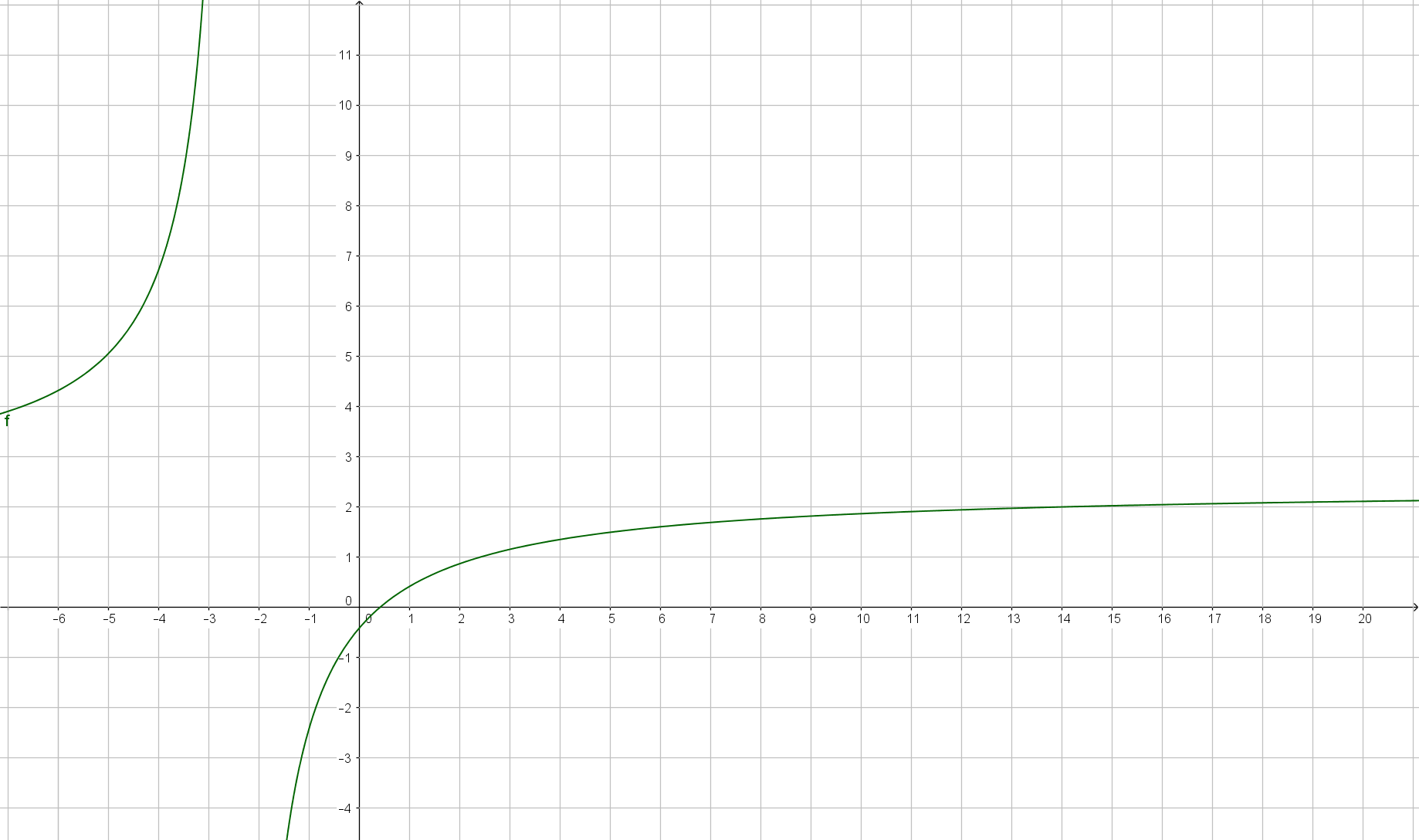
Si on fait l’hypothèse de récurrence que tous les sont des entiers jusqu’à un certain entier quelconque , le développement précédent prouve que est un entier ( est un entier, et tous les termes de la somme sauf peut-être le premier, le sont. Donc le premier aussi l’est.

On vérifie que les termes de rang impair sont multiple de .

**3. Une suite homographique**

La suite est définie par son premier terme, et la relation de récurrence : pour tout ,

. Combien vaut  ?

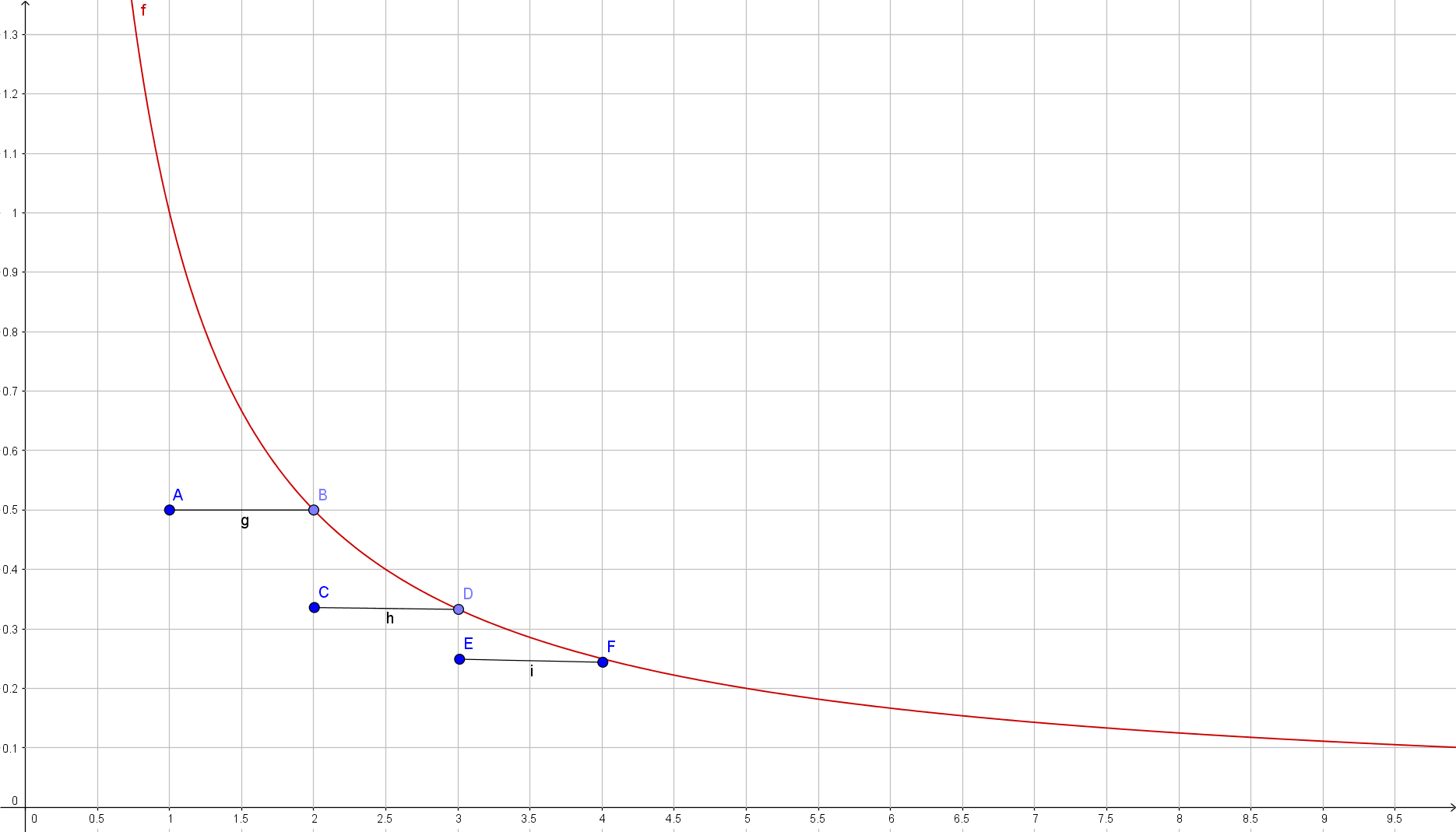
Observons la fonction définie par  . Calculons les images successives d’un réel supérieur à 1. . Encore plus fort : et finalement (l’exposant représente la composition des fonctions). Comme ,

**4. Troncature**

On considère le nombre  . Quelle est sa troncature au dixième ?

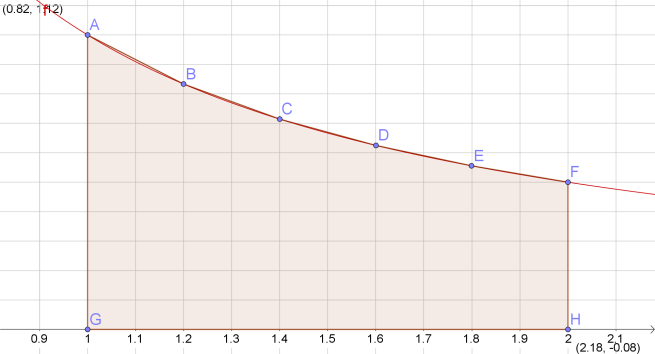
On peut grouper les 1 008 termes deux par deux :

D’après l’inégalité entre les moyennes harmoniques et arithmétiques : et donc :

6

La minoration

Par ailleurs

****Pour montrer que on peut découper l’intervalle [1, 2] en cinq. est inférieure à la somme des aires de cinq trapèzes. Cette somme vaut , nombre inférieur à 0,7. Donc le premier chiffre après la virgule dans le développement décimal de est 6.

La majoration

**5. Quaestiones super geometriam euclidis**

**1. *Une définition inutile***

*a. Rappeler pourquoi* les suites arithmétiques de nombres réels se caractérisent par le fait que tout terme – sauf le premier – est moyenne arithmétique de ses deux voisins.

*b. Rappeler pourquoi* les suites géométriques de nombres réels positifs se caractérisent par le fait que tout terme – sauf le premier – est moyenne géométrique de ses deux voisins.

*c.* On pourrait appeler *suite harmonique* toute suite dont tout terme – sauf le premier – est moyenne harmonique de ses deux voisins : pour tout , . Qu’en est-il de la suite des inverses des termes d’une telle suite? Conclure.

**2. *LA suite harmonique***

LA *suite harmonique* (article défini) est la suite dont les termes sont successivement les inverses des entiers naturels non nuls. La *série harmonique* est la suite dont le -ième terme est la somme des premiers termes de la suite harmonique, son terme d’indice est :

L’ouvrage *Quaestiones super geometriam euclidis*, de Nicole ORESME (1320 ? – 1382), dont deux exemplaires incomplets ont été retrouvés à la bibliothèque vaticane vers 1960, contient une démonstration du fait que la série harmonique tend vers l’infini (terme audacieux pour l’époque) :

*a.* Pour tout entier , . Pourquoi ?

*b.* Oresme conclut : « il y a ainsi une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d’un pied [lire *plus grande que* ], donc le tout sera infini ». Mettre son raisonnement en forme.

*c.* Pietro MENGOLI (1626 ? – 1686) commence par prouver que, pour tout , . Montrer cette inégalité et en déduire que la série harmonique tend vers l’infini.

*d.* Jacob BERNOULLI (1654 – 1705) regroupe les termes d’indices compris entre un entier et son carré : Pout tout , . Montrer cette inégalité et conclure.

**3. *Tentatives d’amaigrissement***

La série harmonique présente une croissance très lente, comme en témoigne le tableau ci-dessous :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| (arrondi au dixième) | 2,9 | 5,2 | 7,5 | 9,8 | 12,1 | 14,4 | 16,7 | 19 | 21,3 |

… et pourtant elle diverge. On pourrait se demander si ôter une partie des termes de la somme qui la définit ne la ramènerait pas à la raison.

*a.* Considérons la suite définie par (on a ôté trois termes sur quatre de la somme définissant ). Cette suite est-elle convergente ?

*b.* Aubrey KEMPNER propose (1914) d’éliminer de la somme définissant tous les termes dont l’écriture décimale utilise le chiffre 9.

- Pour un entier *p* donné, combien y a-t-il d’entiers à *p* chiffres dont l’écriture n’utilise pas le chiffre 9 ?

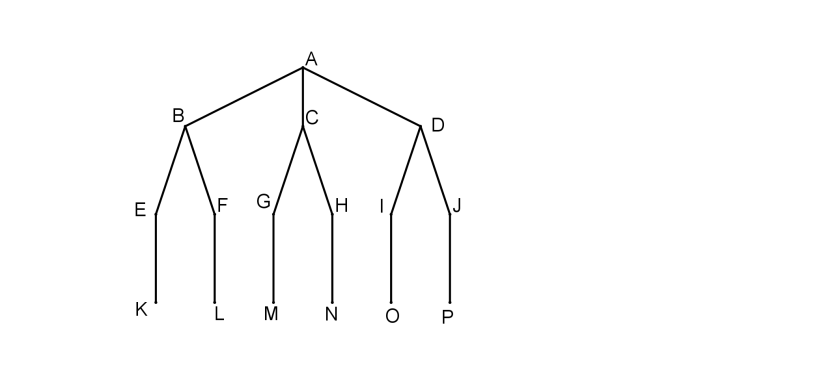
- Peut-on majorer la somme des inverses des entiers à *p* chiffres « sans 9 » ?

- Conclure.

**Dénombrements**

**1. « Il y a toujours eu des filles dans la famille… »**

Alice a trois filles. Chacune de ses filles a deux filles. Chacune des petites-filles d’Alice a une fille. Dans cet ensemble de 16 femmes, combien y a-t-il de sous-ensembles ne contenant aucune paire {mère, fille} ? L’ensemble vide est compté comme satisfaisant à cette condition.



Ou bien Alice appartient à un tel ensemble, ou bien non. Dans le premier cas, ses filles B, C et D ne lui appartiennent pas. On peut compléter cet ensemble en prenant 0 ou 1 personnes parmi E et K, parmi F et L, etc., parmi J et P. Cela fait trois choix possibles dans chaque branche issue de A. Au total choix.

Dans le second cas, si par exemple B n’est pas dans l’ensemble, {E, F}, {E, L}, {F, K} ou {K, L}, ainsi que les singletons formés avec E, F, K et L et l’ensemble vide sont possibles, soit 9 possibilités… à combiner avec ce qui se passerait pour C et D.

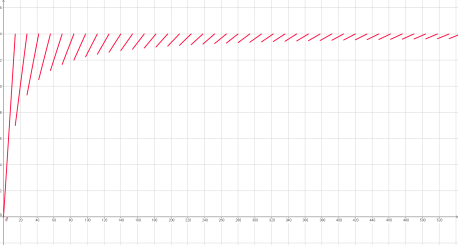
Si B est dans l’ensemble, E et F en sont exclues et on peut compléter avec {K, L}, ou les singletons formés avec K et L ou l’ensemble vide. Au total 4 possibilités. Chacune des filles d’Alice est donc, ou non, « tête » d’une chaîne de 13 possibilités. Au total, il y a donc sous-ensembles « sans Alice ».

*L’ensemble vide semble compté plusieurs fois… mais c’est une illusion, puisque chacun des « morceaux d’ensembles » ainsi envisagé, issu de* B *par exemple, ne se conçoit que comme complété par d’autres morceaux issus de C et D. Seule la combinaison vide-vide-vide donne le vide.*

Au total

**2. Ikea**

Le mardi 3 janvier 2017, Solveig achète un livre et une étagère. À compter de ce jour, elle achète un livre par jour et une étagère un mardi sur 2. Elle procède ainsi jusqu’au 31 décembre 2018 compris. Combien de fois, durant la période allant du 3 janvier 2017 au 31 décembre 2018, Solveig pourra-t-elle disposer ses livres sur les étagères de sorte que chaque étagère en supporte le même nombre ?

Tant que Solveig ne possède qu’une étagère, l’objectif fixé par l’énoncé est réalisé. Il est réalisé 14 fois. L’achat de la seconde se produit au moment où Solveig possède 15 livres. L’objectif fixé est atteint chaque fois que le nombre total de livres est pair, jusqu’à l’achat du 28ème livre, donc 7 fois. À partir du 29ème livre (à la troisième étagère), l’objectif est atteint chaque fois que le nombre total de livres est un multiple de 3 ; cela se produit 5 fois, jusqu’à y compris l’achat du 42ème livre. Il y a quatre multiples de 4 entre 43 et 56, 3 multiples de 5 entre 57 et 70, 3 multiples de 6 entre 71 et 84, 2 multiples de 7 entre 85 et 98, 2 multiples de 8 entre 99 et 112, 2 multiples de 9 entre 113 et 126, 2 multiples de 10 entre 127 et 140, 2 multiples de 11 entre 141 et 154, 2 multiples de 12 entre 155 et 168, 2 multiples de 13 entre 169 et 182. Par la suite, on n’obtient qu’un seul multiple de 14 (196). Par la suite, c’est tous les 14 jours que les étagères porteront le même nombre de livres. Ce que montre aussi la courbe représentative de la fonction .

**3. Discipline**

Le responsable d’une équipe prévoit de louer 7 chambres dans un hôtel. Ces chambres, lui dit-on, seront situées dans un couloir en offrant vingt, dix de chaque côté. Il souhaite éviter tout voisinage (il ne réservera aucune paire de chambres contiguës situées d’un même côté du couloir). De combien de façons peut-on réaliser cet objectif ?

Si Chambres sont situées d’un même côté du couloir, il y a au moins chambres libres de ce côté-là. Donc . La répartition entre les deux côtés prend donc les valeurs (5, 2), (4, 3), (3, 4) et (2, 5).

Une fois que chambres ont un rôle (soit d’être occupées, soit de servir de séparation), il reste

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

, c’est-à-dire chambres vides. On distribue ensuite la liste des chambres occupées ou qui servent de séparation.

- Pour , il reste une chambre à choisir parmi 10, donc 10 possibilités,

- Pour , il reste 3 chambres à choisir parmi 10, donc 120 possibilités,

- Pour , il reste 5 chambres à choisir parmi 10, donc 252 possibilités,

- Pour , il reste 7 chambres à choisir parmi 10, donc 120 possibilités.

Au total, le nombre de dispositions possibles est

**4. 1, 2, 3, 4**

On considère les suites de 2 017 termes prenant les valeurs 1, 2, 3 ou 4. Combien y en a-t-il faisant apparaître un nombre pair de 1 ?

On compte les suites comportant 0, 2, 4, etc. 2 016 fois 1. Leur nombre s’écrit :

Cette somme fait apparaître tous les termes d’exposant impair dans le développement de . On les retrouve dans le développement de . On a donc :

**5. Chutes sans gravité ?**

Six enfants jouent dans un parc de loisirs, sur une structure en forme d’arbre. Cette structure présente 9 branches, identifiées par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H et I. En dégringolant de la structure, chaque enfant prend un appui temporaire sur une des branches. Voici le scénario :

- Ali touche successivement les branches A, B puis C ;

- Ben touche successivement les branches D, E puis F ;

- Caro touche G, A puis C ;

- Dora touche B, D puis H ;

- Elsa touche I, C puis E ;

- Fred touche toutes les branches, dans un ordre… à déterminer.

Quels sont les ordres possibles, du haut en bas ? Combien y en a-t-il ?

On utilise le signe < pour enregistrer ce qu’on sait de l’ordre (à gauche du <, on est plus haut). Il vient :

A < B < C (1), D < E < F (2), G < A < C (3), B < D < H (4), I < C < E (5)

On peut rassembler (1) et (3), et utiliser (5) : G < A < B < C < E

On rassemble (2) et (4) : B < D < E < F

Deux ordres apparaissent possibles : G < A < B < C < D < E < F (\*) et G < A < B < D < C < E < F (\*\*)

Dans ces deux suites ordonnées, il reste à placer H et I (avec deux contraintes I < C et D < H)

Partant de l’ordre (\*), il y a quatre places possibles pour I et trois pour H.

Partant de l’ordre (\*\*), il y a cinq places pour I et quatre pour H, mais s’ils sont tous les deux entre C et D, on peut les échanger, ce qui donne une possibilité de plus.

Ce qui donne 4×3 + 5×4 + 1 = 33 possibilités.

**Équations**

**1. Petit système**

Déterminer les triplets de nombres réels satisfaisant le système

On peut obtenir une condition nécessaire en additionnant membre à membre les trois égalités posant le problème. On obtient : , ou encore

Le seul triplet envisageable comme solution est donc . On vérifie qu’il l’est.

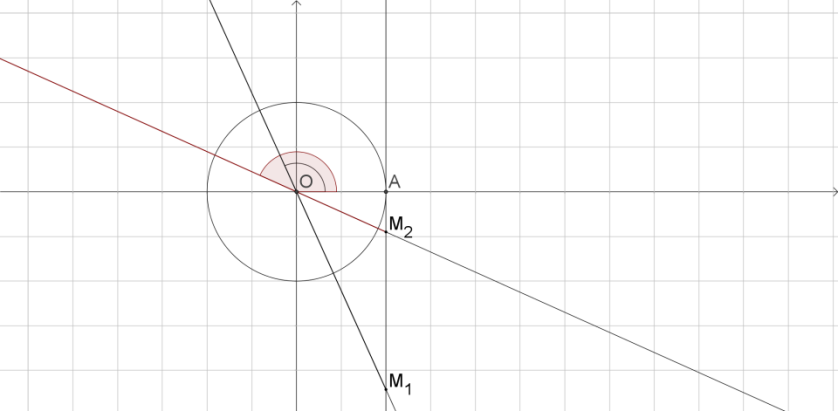
**2. Petite équation**

On considère l’équation , où est un paramètre. On suppose que cette équation a deux racines complexes conjuguées. Quelle est la valeur absolue de la partie réelle de ?

Appelons et les deux racines conjuguées et la troisième racine. Le produit des racines est donc et la somme des racines . La somme des produits deux à deux des racines est .

On reporte dans l’égalité suivante. ON sépare partie réelle et partie imaginaire et on obtient et . Finalement, la partie réelle de a pour valeur absolue 423.

**3. Un peu de trigonométrie**

Combien l’équation admet-elle de solutions dans ? Quelle est la somme de ces solutions ?

La résolution classique conduit à .

On a deux solutions et dans l’intervalle et deux autres et .

En remarquant que , on découvre que .

Finalement la somme des quatre solutions est

**4. Calculs complexes**

Soit des nombres complexes tels que et . Quelles sont les valeurs possibles de

Si on essaie de pratiquer par substitution : donne

et donc

Avec le même procédé, on obtient , et comme, d’après ce qui précède, , . On peut factoriser :

Et comme on obtient . En multipliant par , on obtient , mais par circularité .

sont donc des racines cubiques de l’unité. Les données montrent qu’elles sont distinctes. Pour une racine cubique de l’unité , , donc

**5. Inéquations**

Les réels positifs vérifient .

Peuvent-ils vérifier simultanément : et  ?

Supposons vraies les deux dernières inégalités, entre nombres positifs. On peut les multiplier membre à membre pour obtenir :

Comme , on passe à l’inégalité , en simplifiant par . On parvient donc à , ou encore .

On repart de  et on utilise . Donc et, avec la même inégalit que précédemment, on obtient . Ce qui n’est pas compatible avec si les quatre nombres sont positifs.