|  |  |
| --- | --- |
| C:\Documents and Settings\pmichalak\Mes documents\Mes images\logo_INRIA.png  **Lycée Marie Curie**  **Versailles** | **Une femme des Lumières**  **Une image contenant texte, cadre  Description générée automatiquementGabrielle-Emilie Le Tonnelier de Breteuil, marquise du Châtelet (1706-1749) a bénéficié des mêmes enseignements que ses frères et s’est montrée rapidement brillante en tout, sciences, langues, chant, musique, danse. Elle aime particulièrement les mathématiques.**  **Maupertuis puis Voltaire, avec lequel elle partage son existence durant 15 ans, l’aident à découvrir l’œuvre d’Isaac Newton. Sa traduction des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* sera publiée après son décès.**  **« J’ai perdu un ami de vingt-cinq années, un grand homme qui n’avait de défaut que d’être femme (…) On ne lui a pas peut-être rendu justice pendant sa vie » (Voltaire)** |

***Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première***

***désignés par leurs établissements, les 19 et 20 décembre 2022***

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christophe VITALIS, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD,Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sylvain MAGNE (Lycée Suger, VAUCRESSON), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES)

**… Et les professeurs accompagnant leurs élèves :**

***Emploi du temps***

**Lundi 19 décembre 2022**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1** | **Groupe 2** | **Groupe 3** |
| **10 heures** | **Accueil** | | |
| **10 h 10** | **Arithmétique**  **D.C.** | **Géométrie**  **S.Ma.** | **Calcul littéral**  **C.D.** |
| **12 h 10** | **Repas** | | |
| **13 h 10** | **Dénombrement**  **M.A.** | **Arithmétique**  **D.C.** | **Géométrie**  **S.Ma.** |
| **15 h 10** | **Films** | | |

**Mardi 20 décembre 2022**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1** | **Groupe 2** | **Groupe 3** |
| **10 heures** | **Accueil** | | |
| **10 h 10** | **Géométrie**  **S. Ma.** | **Calcul littéral**  **C.D.** | **Arithmétique**  **S.Mo.** |
| **12 h 45** | **Repas** | | |
| **13 h 15** | **Calcul littéral**  **C.D.** | **Dénombrements**  **M.A.** | **Dénombrement**  **S. Mo.** |
| **15 h 10** | **Bijections** | | |

**Arithmétique**

**Exercice 1 comme produit**

Déterminer tous les couples d’entiers tels que et .

Comme la décomposition en facteurs premiers de 2 022 est , les seules décompositions en produit de deux entiers vérifiant les conditions imposées sont et . Les couples cherchés sont donc les couples .

**Exercice 2 « On n’est pas sérieux quand on a 17 ans »**

Soit et deux entiers strictement positifs tels que . Quelle la la valeur minimale de l’entier  ?

L’égalité s’écrit aussi soit, après simplifications,

Comme est un entier strictement positif et la fonction affine est croissante sur **R**, la valeur minimale de est obtenue pour soit .

**Exercice 3 On fabrique un nombre non décimal**

1. Montrer que si , et sont trois entiers naturels non nuls consécutifs alors la somme n’est pas un multiple de 3.
2. En déduire que pour tout entier , le nombre n’est pas un nombre décimal.
3. Si trois entiers sont consécutifs, il existe un entier tel que ces entiers puissent s’écrire .

La somme étant commutative, le produit peut donc s’écrire

Soit .

Comme est un entier, cela signifie que le reste de la division euclidienne de par 3 est 2 et donc n’est pas un multiple de 2.

1. Pour tout entier , .

D’après la question précédente la somme n’est pas un multiple de 3. Si le nombre était un nombre décimal, il existerait un entier et un entier tel que . On aurait alors . Cette égalité est incompatible avec le fait que est un multiple de 3 alors que ne l’est pas.

Donc n’est pas un nombre décimal.

**Exercice 4 - Carrés parfaits**

1. Quelle est le plus petit entier strictement positif tel que l’entier soit un carré parfait (c’est-à-dire le carré d’un nombre entier).
2. Quel est le plus grand entier naturel tel que et est un carré parfait ?
3. Démontrer que si est un entier strictement positif et inférieur à 200 alors ne peut être un carré parfait.
4. On considère les cinquante premières puissances impaires de (). Démontrer que la somme de trois quelconques de ces puissances (différentes) n’est pas un carré parfait.

On commence par rappeler que tout entier naturel peut se décomposer en produit de puissances de nombres premiers et remarquer qu’un entier naturel est un carré parfait si et seulement si la puissance de chaque facteur premier de sa décomposition est paire.

1. . L’entier k est donc le plus petit entier naturel tel que le produit soit un carré parfait si et seulement si 3 et 7 sont élevés à la plus petite puissance paire supérieure ou égal à 1 soit 2. On a donc et .
2. . Par le même raisonnement, on cherche donc le plus grand entier tel qu’il existe un entier tel que et .

Comme , l’inégalité se traduit par soit puisque est un entier. Le plus grand entier cherché est donc .

1. . Le nombre est un carré parfait (non nul) si et seulement s’il existe un entier strictement positif tel que , ce qui est incompatible avec la condition .
2. Considérons trois puissances impaires de 10 : où . Soit .

. Comme , et sont des entiers strictement positifs pairs et donc est un entier impair donc ne contenant pas 2 dans sa décomposition en facteurs premiers. Comme , le facteur 2 reste à la puissance impaire dans la décomposition de qui ne peut donc pas être un carré parfait.

*Remarque :**le résultat se généralise à trois puissances quelconques deux à deux distinctes de 10. En effet, si*

*. Comme sont distincts, la somme des chiffres de est 3 donc 3 divise .*

*Si était un carré parfait, serait donc divisible par 9 ce qui n’est pas le cas.*

**Exercice 5 Somme des diviseurs**

Soit un entier naturel, on note la somme des diviseurs positifs de . Par exemple .

1. Déterminer le nombre premier impair tel que .
2. Déterminer tous les couples d’entiers naturels consécutifs tels qu’il existe deux nombres premiers et supérieurs ou égaux à 3 pour lesquels et .
3. Déterminer le nombre de couples d’entiers premiers distincts et inférieurs à 30 pour lesquels n’est pas divisible par 24.
4. Comme est un nombre premier impair, et les diviseurs positifs de sont .

On cherche donc un nombre premier p impair tel que c’est-à-dire soit . Cette équation a pour discriminant et pour solutions 29 et 30.

Seul le nombre 29 est bien un nombre premier impair et donc la solution cherchée.

1. Si avec donc , alors les diviseurs positifs de sont et .

Si avec de même , alors les diviseurs positifs de sont d’où .

s’écrit donc .

De plus et sont des entiers consécutifs ce qui signifie que ou .

Dans le cas où , on aboutit à la résolution du système soit

Soit c’est-à-dire . Or 77 n’est pas un nombre premier donc ce cas est impossible.

Dans le cas où , on aboutit à la résolution du système soit

Soit c’est-à-dire . 23 et 103 sont bien des nombres premiers.

Il existe donc un unique couple d’entiers qui convient : le couple .

1. Les diviseurs positifs (deux à deux distincts) de sont

donc

soit .

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Ils sont au nombre de 10.

Le nombre total de couples d’entiers premiers distincts et inférieurs à 30 est donc égal à .

On cherche donc d’abord le nombre de couples d’entiers premiers distincts et inférieurs à 30 pour lesquels le nombre entier est divisible par 24 et on retranchera ce nombre à 90.

On remarque que . Pour chaque valeur de , on doit donc trouver les valeurs de (inférieures à 30) qui permettent d’avoir au moins trois 2 et un 3 dans la décomposition de .

On peut résumer les différents cas dans un tableau :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | doit être un multiple de | Valeurs de  (différentes de ) | Nbre de couples |
| 2 |  |  | 7, 23 | 2 |
| 3 |  | 3 | 2, 5, 11, 17, 23, 29 | 6 |
| 5 |  | 2 | 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 | 8 |
| 7 |  | 3 | 2, 5, 11, 17, 29 | 6 |
| 11 |  | 1 | 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29 | 9 |
| 13 |  |  | 5, 11, 17, 23, 29 | 5 |
| 17 |  | 2 | 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29 | 8 |
| 19 |  | 3 | 2, 5, 11, 17, 23, 29 | 6 |
| 23 |  | 1 | 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29 | 9 |
| 29 |  | 2 | 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 | 8 |

Au total on a donc couples pour lesquels le nombre entier est divisible par 24 et donc couples d’entiers premiers distincts et inférieurs à 30 pour lesquels le nombre entier n’est pas divisible par 24.

*Remarque :* On peut vérifier les résultats avec un programme Python :

**L = [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29]**

**couples = []**

**for p in L:**

**for q in L:**

**if p != q and (p + 1) \* (q + 1) \* (p\*\*2 +1) % 24 != 0:**

**couples.append((p, q))**

**print(len(couples)) # affiche 23**

**print(couples) # éventuellement pour voir les 23 couples solutions**

**Exercice 6 – Nombres *refactorisables***

Soit un entier naturel non nul. On rappelle que si , alors il existe une unique décomposition en facteurs premiers de s’écrivant où est un entier strictement positif, sont des nombres premiers vérifiant et sont des entiers strictement positifs.

On note le nombre des diviseurs positifs de l’entier .

1. Montrer que
2. Un entier naturel non N tel que est *refactorisable* s’il admet comme diviseur. Par exemple, 6 et 8 admettent tous les deux 4 diviseurs positifs. 4 est diviseur de 8 donc 8 est rfactorisable mais 4 n’est pas diviseur de 6 donc 6 n’est pas refactorisable.

Déterminer tous les nombres refactorisables tels que .

1. Déterminer le plus petit nombre refactorisable tel que .
2. Si alors un diviseur de est un nombre s’écrivant où pour tout entier i compris entre 1 et k, . Il y a donc valeurs pour , valeurs pour , …, valeurs pour , ce qui donne bien (principe multiplicatif dans un arbre de dénombrement).
3. Supposons que est refactorisable et tel que . est donc un multiple de 6, ce qui signifie avec les notations adoptées que et . Si possède un diviseur premier autre que 2 et 3, alors on aura

ce qui contredit .

Le nombre s’écrit donc et ce qui donne seulement deux possibilités et ou et soit ou .

1. Supposons de même que est refactorisable et tel que . est donc un multiple de et s’écrit où et .

De plus, donc chacun des facteurs est une puissance de 2 et chaque est une puissance de 2 à laquelle on a retiré 1.

Comme , d’où .

Au final, on aboutit à l’encadrement , ce qui donne comme valeurs possibles de (puissances de 2 moins 1) : 15, 31, 63, 127, 255.

Le produit vaut alors respectivement 16, 8, 4, 2, 1 (1 si ).

Quelques remarques pour trouver le plus petit entier qui convienne :

* Les plus grands exposants doivent paraitre sur les plus petits nombres premiers ;
* En cas d’exposants égaux, les petits facteurs premiers donnent les plus petites valeurs de  ;
* Chaque exposant est une puissance de 2 moins 1 ;
* On ne peut avoir plus de 5 facteurs premiers distincts (lorsque car )

On peut alors rassembler les différentes possibilités dans un tableau, suivant le nombre de facteurs premiers distincts (de 1 à 5) de .

|  |  |
| --- | --- |
| Nombre de facteurs premiers distincts de | Valeurs de susceptibles d’être minimales |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

En comparant les plus petites valeurs de chaque ligne entre elles, comme on vérifie que :

, on en déduit que le plus petit entier refactorisable et tel que est .

**Géométrie**

**Exercice 1 Périmètre inconnu**

|  |  |
| --- | --- |
| On considère, comme dans la figure ci-contre, deux triangles et rectangles respectivement en et  On suppose que , , et .  Déterminer les valeurs possibles du périmètre du quadrilatère . |  |

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles et , on obtient :

et

Soit c’est-à-dire .

Une solution évidente de cette équation est 1. Le produit des deux solutions étant 9 les deux solutions de l’équation sont 1 et 9.

Le périmètre du quadrilatère est .

Les valeurs possibles du périmètre sont donc 22 et 46.

**Exercice 2 Autour d’un hexagone**

|  |  |
| --- | --- |
| On considère, comme sur la figure ci-contre, un hexagone régulier (polygone ayant six côtés tous de même longueur et six angles de même mesure).  On suppose que la longueur de chaque côté vaut et on note O le centre du cercle circonscrit à l’hexagone.   1. Déterminer l’aire de l’hexagone en fonction de . 2. On considère la région située entre l’hexagone et le cercle et on suppose que cette région a pour aire 123. Déterminer un encadrement de d’amplitude . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. L’hexagone étant régulier, son aire est six fois l’aire du triangle AOB. De plus, le triangle AOB est isocèle en O ([OA] et [OB] sont deux rayons du cercle circonscrit) et . Le triangle AOB est donc un triangle équilatéral de côté de longueur . Si I désigne le milieu de [AB], le triangle OIA est rectangle en I et, d’après me théorème de Pythagore,   d’où .  L’aire du triangle AOB vaut donc :  . |  |

On en déduit que l’aire de l’hexagone vaut 6.

1. L’aire de la région située entre l’hexagone et le cercle est :

. Cette aire valant 123, on a d’où .

La calculatrice affiche On en déduit que .

**Exercice 3 Longueur inconnue**

On considère un triangle ABC et D un point du segment [AC]. On suppose que , , et .

Déterminer la longueur AB.

|  |  |
| --- | --- |
| Comme , il existe un réel positif tel que et .  Dans le triangle ADC, on peut donc écrire :    Soit  Soit  Soit . |  |

Le discriminant de cette équation est égal à et ses solutions sont et . Comme est un nombre positif, la seule valeur retenue est . On en déduit que .

Dans le triangle ABC, on a de plus, d’où :

Soit c’est-à-dire, puisque , .

**Exercice 4 Carambolage**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre, trois carrés ombrés sont construits sur les côtés d’un triangle ABC, à l’extérieur de ce triangle. Les trois carrés non ombrés sont construits à partir de sommets des carrés ombrés.  Déterminer le rapport de la somme des aires des carrés non ombrés à la somme des aires des carrés ombrés ? |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Notons . Les relations métriques dans le triangle ABC donnent :  .  D’autre part,  donc et, en se plaçant dans le triangle ADE :    puisque AEGB et ACHD sont des carrés.  On en tire  On montrerait de même que et . |  |

En additionnant membre à membre les trois dernières égalités, on obtient :

soit .

Cela signifie que le rapport de la somme des aires des carrés non ombrés à la somme des aires des carrés ombrés est égal à 3.

**Exercice 5 Cercles rangés dans un triangle**

|  |  |
| --- | --- |
| On considère la figure ci-contre dans laquelle quatre cercles de rayon 1 sont tangents extérieurement l’un à l’autre et tangents chacun à l’un des côtés du triangle .   1. Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle . 2. Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle . 3. On diminue le rayon du cercle de centre de manière que : |  |

* le cercle de centre demeure tangent au côté ;
* le cercle de centre demeure tangent aux trois autres cercles ;
* le cerce de centre devienne tangent aux trois autres cercles.

Déterminer le nouveau rayon du cercle de centre .

1. Les cercles de centre et sont tangents. Si on appelle le point de contact alors appartient au segment et, comme ces deux cercles ont même rayon, le point est le milieu de On a donc .

On démontrerait de même que . En particulier, le triangle est équilatéral et le triangle QRP est isocèle en.

De plus, les cercles de centres et étant tangents au côté et de même rayon, les droites et sont parallèles à (en considérant les projetés orthogonaux des centres du on forme des rectangles) et le point est en fait le milieu de

On peut donc écrire ,

Et donc

On remarque que le triangle est rectangle en et comme on démontrerait, comme pour les droites et , que est parallèle à et est parallèle à , le triangle est rectangle en et semblable au triangle .

1. Comme on connait les mesures particulières des angles du triangles (30°, 60°, 90°), pour connaitre les longueurs de ses côtés il suffit de connaitre la longueur du côté .

Si on considère les projetés orthogonaux et de respectivement sur et , les triangles et sont rectangles en , ont le côté en commun et les côtés et de même longueur. Ils sont donc isométriques. On en déduit . De même .

|  |  |
| --- | --- |
| On peut alors considérer le trapèze comme sur la figure ci-contre, dans lequel est le projeté orthogonal de sur .  Le quadrilatère a ses côtés deux à deux parallèles et un angle droit. C’est un rectangle et . |  |

Le triangle est rectangle en et donc .

Le triangle est rectangle en et d’où donc .

On en déduit .

Dans le triangle rectangle en , on en tire :

d’où et d’où .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Après les modifications données dans l’énoncé, on obtient la figure ci-contre.   Soit alors et les projetés orthogonaux respectifs sur la droite des centre et des trois cercles. Ces points sont aussi les points de contact de ces cercles avec la droite . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| On a donc et .  On a aussi toujours et, cette fois-ci,  .  La figure obtenue est symétrique par rapport à la droite et le point est sur cet axe de symétrie.  De plus, la droite est encore parallèle à la droite et on note le point d’intersection de cette droite avec . Alors :  et et . |  |

Le traingle est rectangle endonc, d’après le théorème de Pythagore,

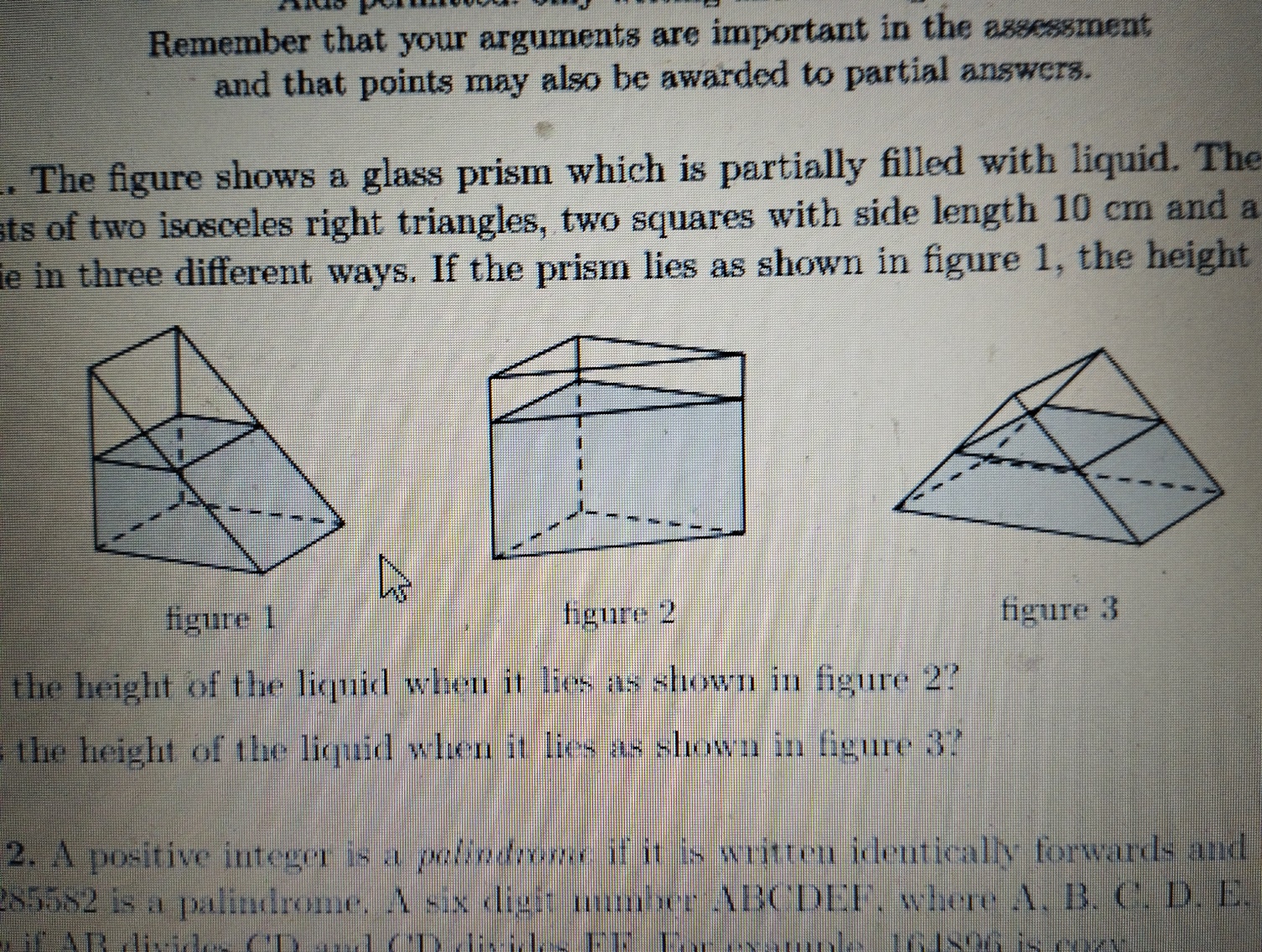
Soit .

D’autre part donc, d’après le théorème de Pythagore dans le triangle rectange en , .

Le nombre r est dinc solution de l’équation , équation dont le discriminant vaut 5 et donc la seule solution positive est .

**Exercice 6 Exercice bidon**

Un récipient a la forme d’un prisme droit à base triangulaire (les bases sont des triangles rectangles isocèles dont les côtés de l’angle droit mesurent 10 cm). Les faces latérales sont des carrés de côté 10 cm et un rectangle.

Dans la position de la figure 1, la hauteur du liquide est 5 cm. À quelle hauteur est le liquide dans chacune des autres situations (l’histoire ne dit pas comment on remplit le récipient).

Le volume du récipient s’exprime ainsi :

Dans la situation de la figure 1, le volume de la partie « vide » est : Le volume du liquide est donc

La hauteur du liquide dans le cas de la figure 2 est donnée par et donc

Dans le cas de la figure 3, la partie vide est un prisme droit dont les bases sont des triangles rectangles isocèles de côté et la hauteur 10. On a donc et donc . La hauteur de ces triangles est donc . La hauteur du liquide est donc aussi

**Équations – calcul littéral**

**Exercice 1**

Déterminer les nombres réels , et tels que, pour tout réel , .

Deux fonctions polynômes et sont égales (c’est-à-dire pour tout réel , ) si et seulement si ces polynômes ont le même degré et les mêmes coefficients.

Comme, pour tout réel , , l’égalité donnée seta vérifiée pour tout réel si et seulement si soit

**Exercice 2**

On considère une suite de quatre nombres rationnels telle que si l’un des termes de la suite est égal à , le terme suivant est égal à .

Si le troisième terme de la suite est , quel est la valeur du premier terme  ?

d’où c’est-à-dire .

De même, d’où c’est-à-dire

**Exercice 3 Fabrication d’une suite**

On forme une suite numérique de la manière suivante :

* on choisit le premier terme ;
* chacun des termes est obtenu comme image du précédent par une fonction donnée.

1. On suppose dans cette question que est la fonction qui à tout réel associe le réel et que 7 est le troisième terme de la suite.

Quels sont les nombres possibles pour les deux premiers termes de cette suite ?

1. On suppose dans cette question que est la fonction qui à tout réel associe le réel et que la suite alterne entre deux nombres différents et . Déterminer toutes les valeurs possibles de et .
2. Notons et respectivement le premier et le troisième terme de la suite. On peut alors écrire :

soit c’est-à-dire ou .

Si , alors est solution de . Cette équation a pour discriminant et donc aucune solution.

Si , alors est solution de soit . Cette équation a pour solution évidente 1. Le produit des solutions vaut 3 donc l’autre solution est 3.

Donc les nombres possibles pour les deux premiers termes de la suite sont 1,4 et 3,4

1. Le premier terme de la suite est et le deuxième est donc .

Le deuxième terme de la suit est et le troisième terme de la suite est donc .

On en déduit

Soit

Soit .

Comme , la seule possibilité est soit .

En reportant dans la première équation, on obtient soit .

Cette équation a pour discriminant 9 et pour solutions 4 et 7.

Donc les nombres possibles pour les deux premiers termes de la suite sont 4,7 et 7,4.

**Exercice 4 Polynôme inconnu**

Déterminer une fonction polynôme telle que, pour tout réel ,

On commence par remarquer que si le degré de est alors le degré de est car les termes en s’annulent.

On en déduit qu’il existe trois réels tels que pour tout réel , .

Alors

Soit

On aura donc, pour tout réel , si et seulement si soit.

On en déduit que . Comme de plus, c’est-à-dire , on trouve et .

**Exercice 5 Archimède a fait mieux…**

Soit un nombre réel tel que . Dans le plan muni d’un repère orthonormal, on considère la parabole d’équation et la droite d’équation .

On note S le sommet de et on note et les points d’intersection de et ( étant le point d’abscisse la plus petite).

Calculer la valeur de lorsque l’aire du triangle est égale à.

|  |  |
| --- | --- |
| Le sommet S de la parabole est le point de coordonnées (0,2).  D’autre part les abscisses des points et sont les solutions de l’équation soit .  Le discriminant de cette équation est  soit .  Comme , donc .  Les abscisses des points et sont donc .  Comme , donc et .  On en tire et .  Pour exprimer l’aire du triangle en fonction de , on considère les projetés orthogonaux respectifs de et sur la droite d’équation (comme sur la figure ci-contre). L’aire sera obtenue en retranchant à l’aire du trapèze la somme des aires des triangles et .  car .  car et ont même abscisse.  L’aire du triangle vaut donc .    Soit car  car .  L’aire du triangle vaut donc . |  |

Soit

L’aire du trapèze vaut donc

Soit .

Le problème revient donc à résoudre l’équation :

En multipliant les deux membres d el’équation par , on se ramène à l’équation :

Soit

Soit

Soit

Soit soit, puisque ,

Le discriminant de cette équation est et ses solutions sont et .

Comme , la seule solution à retenir est .

**Exercice 6 – Équations bicarrées**

1. Résoudre l’équation .
2. Déterminer le plus petit entier strictement positif pour lequel il existe quatre entiers tels que et, pour tout réel , .
3. Soit et deux entiers tels que . Démontrer que l’expression ne peut pas être factorisée comme dans la question 2.
4. En posant , on se ramène à résoudre l’équation . Le discriminant de cette équation est et les solutions sont et .

Les solutions de l’équation sont donc .

1. Pour tout réel ,

Soit .

On en déduit que, pour tout réel , si et seulement si

soit soit, puisque ,

Soit . Comme , minimiser N revient à minimiser .

Or, la deuxième équation du système s’écrit . En particulier est positif et minimiser revient à minimiser , c’est-à-dire minimiser . Comme et sont des entiers, doit être un nombre pair différent de 0 et sera minimiser pour soit .

Donc le plus petit entier strictement positif pour lequel il existe quatre entiers tels que et, pour tout réel , est .

1. En adoptant la même démarche que dans la question 2., on aboutit au système .

On en tire

Soit . Ceci implique soit, puisque u est un entier

soit . On peut vérifier qu’aucune des valeurs entières de u comprises entre et ne donne une valeur entière pour r.

L’expression ne peut donc pas être factorisée comme dans la question 2.

**Dénombrement – Probabilités**

**Exercice 1 Permutations au sommet**

Une permutation d’un ensemble d’objets est un classement de ces objets dans un ordre particulier.

Par exemple, 312 et 231 sont deux des permutations possibles de l’ensemble {1, 2, 3}.

1. Déterminer combien il existe de triplets tels que les nombres et soient trois nombres distincts de l’ensemble {1, 2, 3, 4, 5} vérifiant et .
2. Déterminer le nombre de permutations de l’ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} qui contiennent les chiffres 254, dans cet ordre en positions adjacentes ?
3. On dit qu’une permutation admet un sommet local lorsqu’elle contient une suite de 3 nombres dans laquelle le nombre du milieu est supérieur à ses deux voisins.

Par exemple, la permutation 35241 de l’ensemble {1, 2, 3, 4, 5} contient deux sommets locaux 5 et 4.

Déterminer le nombre moyen de sommets locaux des permutations de l’ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

1. Dans un triplet et , le nombre peut seulement prendre les valeurs de 3, 4 ou 5.

Si , alors peut valoir 1 ou 2 et vaut alors respectivement 2 ou 1. Il y a donc 2 triplets possibles.

Si , alors les couples possibles sont , ce qui donne 6 triplets possibles.

Si , alors de même peut valoir 1, 2, 3 ou 4 avec à chaque fois 3 valeurs possibles pour , ce qui donne 12 triplets possibles.

En tout, il y a donc 20 triplets vérifiant les conditions imposées.

1. Une permutation contient le bloc 254 peut s’écrire de 4 façons différentes : , ou , les nombres et étant les nombres 1, 3 et 6 dans un ordre quelconque.

Dans chaque cas, il y a façons de choisir et parmi 1, 3 et 6.

Le nombre de permutations contenant le bloc 254 est donc égal à .

1. Le nombre de permutations de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} est égal à .

On commence par compter le nombre total de sommets locaux dans ces permutations. Un sommet local est un bloc dans lequel et .

On raisonne alors comme dans la question 1. peut valoir 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Le nombre de sommets locaux est alors respectivement pour chaque cas : ce qui donne au total 112 blocs. Pour chacun de ces blocs, il y a 6 positions du bloc dans la permutation puis choix des placements des 5 autres valeurs que et Il y a donc sommets locaux.

Le nombre moyen de sommets locaux des permutations de l’ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} est donc .

**Exercice 2 Séparation**

On donne deux ensembles d’entiers,

Et

Trouver deux parties de disjointes et complémentaires, appelées et , telles que la somme de deux éléments distincts de ne soit pas dans et que la somme de deux éléments distincts quelconques de ne soit pas dans

L’élément est dans l’une des deux parties, disons Les sommes de avec ne sont pas des éléments de Est-il possible que soient « candidats » éléments de ? Oui, car leurs sommes deux à deux, ne sont pas des éléments de .

On recommence avec  : les sommes de avec sont dans et les sommes de chacun de ces deux nombres avec ne sont pas dans On élimine encore et dont les sommes avec 5 sont dans et dont la somme avec est dans .

Finalement, et

**Exercice 3 Un entier sur onze est multiple de 11**

On choisit au hasard un entier s’écrivant, dans le système décimal, avec les neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. La probabilité que ce nombre soit un multiple de 11 est-elle inférieure, égale ou supérieure à ?

Il y a (factorielle 9) nombres constitués avec les neuf chiffres . Notons un tel nombre, . Les restes dans les divisions euclidiennes par des puissances paires de valent tous Les restes des puissances impaires de dans ces divisions euclidiennes valent tous . Le nombre a donc le même reste dans la division euclidienne par que . Comme , le problème revient à déterminer les chiffres tels que soit multiple de ou encore que soit multiple de 11. Ce dernier nombre est compris entre et et il est supérieur de à un multiple de Les possibilités sont : , ce qui limite les solutions à et

On obtient la somme avec et les quadruplets obtenus par permutation à partir de ceux-ci. On obtient avec et et les quadruplets obtenus par permutation. Ces quadruplets sont associés à des quintuplets faisant figurer les autres chiffres (eux aussi permutables). Il y a donc multiples de parmi les nombres qui s’écrivent avec neuf chiffres distincts non nuls. La probabilité cherchée est donc :

Cette probabilité est inférieure à

**Exercice 4 Un grand nombre**

Par combien de 0 l’écriture décimale de 2 023 ! s’achève-t-elle ? Quelle est la décimale non nulle la plus à droite ?

On pose le dernier chiffre non nul de et le chiffre des unités de .

L'idée est

* de regrouper les facteurs non multiples de 5 quatre par quatre :
* puis de diviser chaque groupe de 4 par 2 et de l'associer au multiple de 5 :

chaque groupe admet pour chiffre des unités.

donc d’où car et

En fait,

Plus généralement, si est multiple de , on a :

Pour calculer les , on recherche un cycle :

On a , , , et et le cycle a pour longueur 4.

Commençons par 2020 ! (car 2020 est multiple de 5) :

 ;

 ; (ce qui nous permettra de calculer )

 ;

.

En remontant, on obtient successivement :

car , et  ;

car et  ;

car et  ;

car et  ;

car   et que  ;

car et  ;

Enfin, car  et que .

**Exercice 5 Un changement presque imperceptible**

boules, numérotées de à , sont réparties dans deux urnes. On prend une boule dans la première urne et on la place dans la deuxième. La moyenne des numéros des boules placées dans la première urne augmente de , la moyenne des numéros des boules placées dans la deuxième urne augmente de aussi. Quelle est la plus grande valeur possible de ?

On commence par écrire les données, en notant le nombre de boules placées initialement dans la première urne, le nombre de boules placées initialement dans la deuxième urne, la somme des numéros dans la première urne, la somme dans la seconde. On désigne par le numéro de la boule transférée. Le problème s’écrit :

et

ou encore : et

On sait que (somme des premiers entiers) et que .

On en tire puis

Comme on en déduit

Mais (puisque l’une 2 contient boules, la somme des numéros de ces boules est supérieure à la somme des premiers entiers). On en déduit :

Ou encore

Et donc la plus grande valeur de est (ce qui correspond à boules dans l’urne 2, numérotées de à , et c’est la boule qui est transférée).

**Exercice 6 Tétrominos**

|  |  |
| --- | --- |
| On dispose d’une quantité illimitée de tétrominos en forme de T (figure composée de quatre carrés de côtés mesurant 1) et d’un plateau . Il est possible de placer des tétrominos sur le plateau (éventuellement après les avoir fait pivoter) tant qu’il n’y a aucun chevauchement de tetrominos et qu’aucun tétromino ne déborde du plateau. |  |

Pour quelle valeur de peut-on recouvrir entièrement le plateau ?

|  |  |
| --- | --- |
| On peut déjà remarquer qu’on peut recouvrir entièrement le plateau si et seulement si 4 divise .  En effet, si 4 divise , il existe un entier tel que . Alors, comme on peut couvrir un plateau comme sur la figure ci-contre, le plateau sera recouvert par plateaux .  Si 4 ne divise pas , comme l’aire de chaque tétromino est 4, l’aire du plateau doit être un multiple de 4, et doit donc être pair. Il existe donc, dans ce cas, un entier naturel |  |

. On colorie les cases du plateau en alternant le noir et le blanc (comme pour un échiquier) en veillant à ce que la case située dans le coin inférieur gauche soit blanche. Comme n est pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches soit cases blanches, ce qui est un nombre pair. Or, comme les cases blanches ne partagent pas de frontière commune, chaque tétromino couvre un nombre impair de cases blanches (1 ou 3). Comme il faut positionner tétrominos, donc un nombre impair, on couvrira un nombre impair de cases blanches. On aboutit donc à une contradiction.