**Préparation au concours général de mathématiques**

**Année 2021-2022**

**Fiche numéro 1**

**Exercice 1 Triangulation**

Une *triangulation* d’un polygone régulier est un partage de l’intérieur de ce polygone en triangles. Chaque sommet de chaque triangle est alors soit un sommet du polygone soit un point à l’intérieur du polygone.

On considère un polygone régulier ayant sommets () et points en son intérieur (sans que trois de ces points soient alignés).

On suppose que :

* Le seul point commun à deux segments dont les extrémités sont deux de ces points est l’une des extrémités de ces segments.
* Chaque point intérieur au polygone est le sommet d’au moins un triangle.

On admet que toutes les triangulations possibles d’un polygone régulier ayant sommets avec points intérieurs produisent le même nombre de triangles, nombre qu’on note .

Par exemple, pour , on obtient 4 triangulations si et 6 triangulations si (figures ci-dessous)



1. Déterminer puis .
2. Déterminer les valeurs de pour lesquelles .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Comme toutes les triangulations possibles d’un polygone régulier ayant sommets avec points intérieurs produisent le même nombre de triangles, il suffit de produire une triangulation comme sur la figure ci-contre pour calculer .   On en déduit que |  |

On commence par étudier pour les premières valeurs de  :



On cherche ensuite une relation de récurrence en remarquant que puisque toutes les triangulations possibles d’un polygone régulier ayant sommets avec points intérieurs produisent le même nombre de triangles, on peut passer de à en introduisant dans un triangle un point intérieur nouveau P (non aligné avec deux des points intérieurs déjà existants).

|  |  |
| --- | --- |
| De plus, en ajoutant le point P dans un triangle, on remplace ce triangle par trois triangles (en reliant P aux sommets du triangle ), ce qui crée deux triangles de plus.  On a donc, pour tout entier , .  La suite est donc la suite arithmétique de raison 2 et de |  |

premier terme . On en déduit que .

1. Dans la triangulation d'un polygone régulier ayant sommets comprenant aucun point intérieur, on peut choisir de relier l'un des sommets à chacun des sommets restants qui ne lui sont pas adjacents. Dans une telle triangulation de polygones réguliers, on obtient triangles donc, pour tout , .

De plus, le raisonnement fait dans le a pour exprimer en fonction de peut se faire pour quelconque, donc pour tout et pour tout entier , .

D’où pour toute triangulation d’un polygone régulier ayant sommets et points intérieurs.

On a donc et équivaut à soit .

**Exercice 2 Fonctions compatibles**

On dit que deux fonctions et de **R** dans **R** sont compatibles lorsque :

1. Pour tous réels et ,
2. Pour tous réels et ,
3. Il existe un réel , .

Soit et deux fonctions compatibles.

1. Déterminer et .
2. Soit la fonction définie par, pour tout réel , .

Montrer que pour tout réel , .

1. On suppose que, pour tout réel et .
   1. Montrer que pour tout réel .
   2. Montrer que pour tout entier et pour tout réel
   3. En déduire que .
2. La propriété (i) pour donne soit ou .

La propriété (ii) pour donne .

Si , cetet égalité s’écrit soit ce qui est impossible puisque est un réel. Donc , ce qui signifie que .

D’après la propriété (ii), pour tout réel , soit

D’après la, propriété (iii), on en déduit que .

*Remarque : les fonctions sinus et cosinus ont les trois propriétés. Il existe donc bien des focntions compatibles.*

1. D’après le a, et donc ce qui peut s’écrire, pour tout réel ,

Soit

Soit

Soit

Or

Donc

Soit

Soit

C’est-à-dire, pour tout réel , .

1. D’aprè le b, . Montrons par l’absurde que

Supposons que . Par défintion de , pour tout réel , .

De plus, pour tout réel et donc et d’où l’on tire .

Comme , Comme et on a supposé que donc soit et soit et .

Or, pour tout réel ,

Et .

D’où

Soit

Soit .

On démontre alors par récurrence sur que, pour tout entier et tout réel ,

* Pour , on a bien pour tout réel ,
* Si pour un entier on a pour tout réel ,

alors .

Or on a vu que si alors soit soit ce qui entraine soit soit tend vers quand tend vers . Ceci contredit le fait que pour tout réel , .

Donc .

**Exercice 3 Équation fonctionnelle**

Déterminer toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que pour tous réels et ,

. ()

On pourra commencer par montrer qu’une telle fonction est paire.

On constate déjà que la fonction nulle convient.

Si n’est pas la fonction nulle alors il existe un réel tel que.

La relation donne soit .

La relation donne, pour tout réel , . Comme et lorsque décrit **R**, décrit **R+**, la fonction peut prendre toutes les valeurs strictement positives (si ) ou prendre toutes les valeurs strictement négatives (si ).

La relation donne, pour tout réel , soit

Et la relation donne, pour tout réel , soit

Comme peut prendre n’importe quelle valeur positive ou n’importe quelle valeur négative (suivant le signe de )et comme pour tout réel , , on en déduit que la fonction est paire.

La relation donne donc, pour tous réels et non nuls,

en appliquant la parité de .

Ceci s’écrit aussi . On en déduit qu’il existe un réel tel que pour tout réel non nul , , expression aussi valable pour puisque .

En reprenant l’égalité pour , on obtient soit équation en c dont les solutions sont .

Le problème admet donc trois solutions, les fonctions définies sur **R** par et la fonction nulle.

**Exercice 4 Sommes et produits**

Trouver tous les triplets de réels tels que .

On pourra poser , , .

En réduisant au même dénominateur le membre de droite de chaque équation du système donné, on se ramène à résoudre le système

soit

Soit .

En reportant la première équation dans la deuxième, on obtient

qui s’écrit c’est-à-dire ou ou .

* On ne peut avoir , car l’un au moins des quotients de la première équation du système initial ne serait pas défini.
* Si alors, comme , , ce qui s’écrit puisque . On en tire soit, en divisant par puisque ,

Or l’équation n’a pas de solution réelle. On ne peut donc avoir .

Nécessairement soit

Si :

Comme , la première équation du système initial s’écrit soit, en réduisant au même dénominateur  et en multipliant par ce dénominateur :

soit

Soit soit

C’est-à-dire

On a donc

d’où soit et comme solutions les triplets

ou d’où ou soit et comme solutions les triplets

ou d’où ou soit et comme solutions les triplets

Si :

Par le même raisonnement, et la première équation s’écrit

Soit, par des calculs analogues au cas précédent, , ce qui permet d’aboutir aux triplets solutions ou ou .

Au final, on peut aisément vérifier que tous les triplets obtenus sont bien solutions du système initial.

**Exercice 5 À la recherche de nombres premiers**

Existe-t-il des entiers naturels tels que le nombre soit un nombre premier ?

On pourra s’aider de congruences.

On remarque que et que si est pair alors ou encore ,et donc est divisible par 3 donc non premier.

On pose donc où k est un entier. Alors et on s’intéresse d’autres congruence faisant intervenir une puissance de ,

* la congruence modulo 13 : et si est impair alors donc est divisible par 13 et donc non premier.
* La congruence modulo 5 : et si est pair alors soit donc est divisible par 5 et donc non premier.

Il n’existe donc pas d’entier naturels tel que le nombre soit un nombre premier.