**Préparation au concours général de mathématiques**

**Année 2021-2022**

**Fiche numéro 2**

**Exercice 1**

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul , on a :

1. En déduire que pour tout entier et pour tout entier impair, est un multiple de
2. Montrer qu’un entier,, est impair si et seulement si divise .
3. Pour , et la propriété est vérifiée

Si, pour un entier , on a alors

Et la propriété est encore vraie au rang .

On a donc bien, tout entier naturel non nul , .

1. Comme est impair, il existe un entier tel que .

Alors . Or le produit de deux entiers consécutifs est pair donc le nombre est un multiple de .

Chacun des facteurs du produit est pair (somme de deux nombres impairs).

Au final est multiple de .

1. Posons .

* Si est impair, alors pour tout entier , , est divisible par car le seul terme du développement de non divisible par est soit si est impair. On en déduit que divise et donc divise car est impair.
* Si est pair, alors il existe un entier et un entier impair tels que .
  + Si est impair, alors d’après le b, est un multiple de soit

d’où ;

* + Si est pair, alors et , somme dans laquelle on n’a gardé que les valeurs de paires, valeurs au nombre de mais alors ne peut diviser .

**Exercice 2**

Soit un entier naturel non nul, on appelle index d’abondance le nombre , où est la somme de tous les diviseurs positifs de , y compris 1 et .

1. Démontrer que pour tout nombre premier , .
2. Démontrer que pour tout nombre premier impair et pour tout entier strictement positif , .
3. Soit et deux nombres premiers distincts et soit et deux entiers positifs.

Démontrer que .

1. Déterminer le plus petit entier impair positif tel que .
2. Soit un nombre premier. Ses deux diviseurs sont 1 et donc

Comme , on en déduit que .

1. Soit un nombre premier impair. On a donc et si est un entier positif, alors les diviseurs positifs de sont donc

On en déduit que soit soit .

Comme , . d’où d’où

1. Comme est un nombre premier, les diviseurs positifs de sont donc .

Comme est un nombre premier, on a de même .

En regroupant « astucieusement » les diviseurs de , on a :

1. D’après le a. un entier tel que est nécessairement non premier.

Il existe donc entiers premiers deux à deux distincts et entiers naturels non nuls tels que .

* En prolongeant le résultat obtenu à la question c, on peut alors écrire .
* Soit et sont deux nombres premiers tels que et soit un entier positif. Alors, comme

Et

Comme , pour tout entier compris entre 1 et , donc .

* Soit p un nombre premier et deux entiers positifs tels que . Alors

et . Comme et, d’où d’où

et comme , donc .

On en déduit que le plus petit entier tel que doit avoir, dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, des « petits » facteurs premiers, facteurs supérieurs ou égaux à 3 puisque est impair.

Or, d’après le,b d’où et et d’après le c,

donc . Il est donc nécessaire d’avoir au moins trois nombres premiers distincts dans la décomposition de .

On tente avec la décomposition où sont les plus petits possibles :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 105 |  |
| 2 | 1 | 1 | 315 |  |
| 3 | 1 | 1 | 945 |  |

On constate que et on peut vérifier que 945 est bien le plus petit entier impair dont l’index d’abondance est strictement inférieur à 2.

En effet :

* on a vu qu’il est nécessaire de se limiter aux plus petits facteurs premiers ;
* avec les mêmes facteurs premiers, l’index d’abondance augmente avec les exposants de ces facteurs ;
* si a quatre facteurs premiers à savoir 3, 5, 7 et 11, alors soit ;
* si les plus petites valeurs de sont celles pour lesquelles .

**Exercice 3 (Olympiades Internationales 2006)**

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : (i)  .

Montrer que et que l’égalité n’est vérifiée que lorsque .

(on pourra s’appuyer sur :

* le théorème dit de l’angle inscrit : la mesure d’un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l’angle au centre interceptant le même arc ;
* son corollaire : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont sur un cercle et du même côté de la droite (AB) alors  ;
* sa réciproque : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont tels que alors les quatre points sont cocycliques et les points C et D sont du même côté de la droite (AB).

|  |  |
| --- | --- |
| Le point P est à l’intérieur du triangle ABC donc :  L’égalité (i) vérifiée par le point P s’écrit donc :  (somme des mesures des angles d’un triangle)  soit soit c’est-à-dire .  On constate que la valeur de ne dépend pas de P. Or, par définition du point I, donc I vérifie (i). |  |

On en déduit que le lieu des points P vérifiant (i) est celui des points P tels que , c’est-à-dire l’arc du cercle circonscrit au triangle ABC contenant I (réciproque citée ci-dessus dans l’énoncé).

Pour démontrer que , il suffit alors de prouver que I est le point du cercle le plus proche de A. Soit S le centre de . Pour tout point P de , soit soit .

Montrons que . en se plaçant dans le triangle ABC puis dans le triangle CIS isocèle en S. Or, d’après le théorème de l’angle inscrit, et, par définition de I, . Donc .

On a donc bien d’où et on en tire , l’égalité n’ayant lieu que si P et I sont confondus.

*(cette solution est tirée du livre Olympiades internationales de mathématiques 2006-2021 aux éditions Cassini)*

**Exercice 4 (Olympiades internationales 2008)**

1. Montrer que pour tous nombres réels , et différents de 1 et tels que, on a :

.

1. Montrer qu’il existe une infinité de triplets de nombres rationnels différents de 1 et tels que pour lesquels l’inégalité ci-dessus est une égalité.
2. On pose , et , ce qui équivaut à , et .

On est ramené à montrer que si sont différents et de 1 et vérifient , ce qui s’écrit aussi soit , alors

.

Or, pour de tels réels,

Soit .

On en déduit que et l’inégalité est une égalité si et seulement si

1. Dans le changement de variable effectué à la question 1, on remarque que sont rationnels si et seulement sisont rationnels. On se ramène donc à chercher des rationnels différents de 1 et tels que ce qui revient au système

qui s’écrit aussi . On sait que cela signifie que et sont les solutions de l’équation , équation dont le discriminant est

.

L’équation et donc le système auront des solutions rationnelles si et seulement si est le carré d’un nombre rationnel. On cherche donc deux entiers p et q tels que et soit le carré d’un nombre rationnel.

Pour cela, il suffit qu’il existe deux entiers et tels que et c’est-à-dire et .

Si on pose et où est un entier naturel non nul alors et d’où

et d’où et .

On en tire d’une part

Et d’où .

D’autre part

Et d’où

Enfin d’où donc .

(on peut vérifier ses calculs puisqu’avec ces valeurs on a bien )

Chaque valeur de n donne un triplet solution du problème. Il y a donc bien une infinité de triplets de rationnels solutions.

*(cette solution est tirée du livre Olympiades internationales de mathématiques 2006-2021 aux éditions Cassini)*

**Exercice 5**

1. Soit et trois nombres réels strictement positifs tels que : . (R)

Déterminer la valeur de .

1. Soit et trois nombres rationnels deux à deux distincts.

Montrer que est le carré d’un nombre rationnel.

1. Remarquons déjà que le triplet vérifie les relations (R) et qu’alors .

Les relations (R) s’écrivent :

* d’une part d’où l’on tire  soit (1)
* d’autre part d’où l’on tire . (2)

On a de plus, (3)

Enfin, d’après relations (R),

Soit . (4)

Posons . D’après (1), .

D’après (2), soit, d’après (3)

D’autre part, d’après (4),

Le nombre X est donc solution de l’équation soit . Les solutions de cette équation sont 3 et 7.

Si alors comme , ce sui est impossible pour des nombres tous strictement positifs.

On a vu qu’en revanche il était possible d’obtenir qui est donc la seule valeur pour .

1. Posons .

Alors

Soit

En reprenant l’égalité (3) de la question précédente, on en déduit que

C’est-à-dire est le carré du nombre rationnel .