|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  William Rowan Hamilton (1805-1865) | C:\Documents and Settings\pmichalak\Mes documents\Mes images\logo_INRIA.png |
| logouvsq.png |

***Stage ouvert aux lycéens de terminale scientifique présentés par leurs établissements au Concours général des lycées, les 16 et 17 février2015***

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***

**Marie-Françoise BOURDEAU, Inspectrice pédagogique régionale de mathématiques de l’académie de Versailles, décédée en octobre, fut un des moteurs de la Pépinière académique de mathématiques, cherchant des énoncés d’exercices à soumettre aux stagiaires, intervenant dans les stages et rédigeant des solutions. Nous aurons une pensée particulière pour elle à l’occasion de ce stage.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

La Pépinière académique de mathématique organise pour la neuvième année, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Pour un élève de terminale, c’est une récompense et un signe de reconnaissance qu’être présenté au Concours général. La Pépinière académique de mathématiques propose à ces lycéens un moment de travail « entre eux », en espérant développer leur goût des mathématiques.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD,Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILLY SUR SEINE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE), Laurent SERVIERES (Lycée Camille Saint Saëns, DEUIL LA BARRE), Alexandra VIALE (Lycée L’Essouriau, LES ULIS), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES)

**Professeurs accompagnants :** Miguel ROMERO-SCHMIDTKE (Lycée Marie Curie, SCEAUX), Fabrice MAILLARD (Lycée Saint Thomas de Villeneuve, CHAVILLE)

***Emploi du temps***

**Lundi 17 février 2015**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1** | **Groupe 2** | **Groupe 3** |
| **10 heures** | **Exposé****Film** |
| **10 h 50** | **Dénombrement, probabilités (AC + LS)** | **Nombres, arithmétique****(AV + NF)** | **Fonctions****(SM + PJ)** |
| **12 h 30** | **Repas** |
| **13 h 10** | **Fonctions****(SM + PJ)** | **Dénombrement, probabilités (AC + LS)** | **Nombres, arithmétique****(AV + NF)** |
| **14 h 55** | **Nombres, arithmétique****(AV + NF)** | **Fonctions****(SM + PJ)** | **Dénombrement, probabilités (AC + LS)** |

**Mardi 18 février 2015**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1** | **Groupe 2** | **Groupe 3** |
| **10 heures** | **Film****Exposé** |
| **10 h 50** | **Équations, suites** **(CD + MA)** | **Angles et distances****(CH + KR)** | **Calculs, ordre dans R****(MS + CW)** |
| **12 h 30** | **Repas** |
| **13 h 10** | **Calculs, ordre dans R****(MS + CW)** | **Équations, suites** **(CD + MA)** | **Angles et distances****(CH + KR)** |
| **14 h 55** | **Angles et distances****(CH + KR)** | **Calculs, ordre dans R****(MS + CW)** | **Équations, suites** **(CD + MA)** |

**1. Thème : Nombres, arithmétique**

**1. (Sylvester)**

Je possède une large quantité de timbres de valeurs faciales 5 unités et 17 unités. Quel est le plus grand montant que je ne puisse réaliser en associant des timbres des deux sortes ?

**2. 9, 3 et les sept cubes**

Montrer que, si 9 divise la somme des cubes de sept entiers, alors 3 divise le produit de ces sept entiers.

**3. Un irrationnel**

Démontrer que le nombre  est irrationnel.

**4. Voisinage ne fait pas puissance**

Montrer que le produit *n* de trois entiers consécutifs ne peut être une puissance, c’est-à-dire qu’on ne peut trouver deux entiers *a* et *b* supérieurs ou égaux à 2 tels que .

**5. Un grand diviseur commun**

On considère l’ensemble des entiers *n* pour lesquels il existe un entier *k* tel que $n=k^{13}-k.$ Quel est le plus grand diviseur commun à tous ces nombres ?

**6. Problème de partage**

Soit *n* un entier naturel non nul. On considère l’ensemble  . Existe-t-il des valeurs de *n* pour lesquelles il existe un partage de A en deux ensembles disjoints B et C de telle sorte que le produit des éléments de B soit égal au produit des éléments de C ?

*Entrainement sélection de la délégation à l’OIM, mai 2004*

**7. Inspiré par Euclide**

On note *P* l’ensemble des nombres premiers. On considère une partie *M* de *P* ayant au moins trois éléments. On suppose que, pour tout sous-ensemble *A*, fini, non vide et strict de *M*, les facteurs premiers de l’entier  appartiennent à *M*. Montrer que *M* = *P*.

*Entrainement sélection de la délégation à l’OIM, mai 2004*

**8. Premier à Polytechnique ?**

***a.*** Déterminer l’ensemble des nombres entiers relatifs *n* tels que  est premier.

***b.*** Démontrer que, pour tout entier *n* et pour tout diviseur premier impair *p* de , il existe un entier naturel *k* tel que  .

*Oral École polytechnique*

**9. Il s’appelait Personne** (Gilles Personne de Roberval 1602 – 1675)

|  |
| --- |
| http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/15/Roberval_%2860%29%2C_balance_Roberval.jpg/220px-Roberval_%2860%29%2C_balance_Roberval.jpg*Balance de Roberval géante**à Roberval (Oise)**Photo Wikipedia* |

Le 16 septembre 1636, Fermat écrivait à Roberval qu’il avait quelque mal à trouver les nombres rationnels *a* et *b* tels que l’équation  ait ses racines rationnelles.

***a.*** On suppose que *a* et *b* sont des nombres rationnels non nuls. Montrer que, pour établir que l’équation  n’a pas de solutions rationnelles, il suffit de vérifier qu’il n’existe pas de couples de nombres rationnels  tels que  .

***b.*** Montrer que l’équation  n’a pas de solution  dans **Q2.**

**10. Somme des inverses des premiers cubes**

Soit *p* un nombre premier impair et soit *a* et *b* deux entiers tels que  .

Montrer que *p* divise *a*.

**2. Thème : Équations, inéquations, suites**

**1. Équation**

Résoudre $\frac{4x²+15x+17}{x²+4x+12}=\frac{5x²+16x+18}{2x²+5x+13}$

**2. Nombres *k-tangents***

On rappelle que la fonction arc tangente (notée Arctan) est définie sur **R** et associe à tout réel $x$ l’unique réel $y$ appartenant à l’intervalle $\left]-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right[$ tel que $tan\left(y\right)=x$. On rappelle également que tan-1 est l’étiquette d’une touche de calculatrice.

Un entier *k* étant donné, les nombres *x* et *y* sont dits *k-*tangents si l’égalité $Arctan\frac{1}{k} = Arctan\frac{1}{x} + Arctan\frac{1}{y}$ a lieu.

Trouver les paires d’entiers 2015-tangents.

**3. Pas la moyenne**

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Trouver tous les entiers $\left(x\_{k}\right)\_{1\leq k\leq n}$tels que, pour tout entier$i$ de , on a : $\left(n-1\right)x\_{i}\leq \sum\_{\begin{array}{c}0\leq k \leq n\\k\ne i \end{array}}^{}x\_{k}$.

**4. Somme des carrés des écarts**

Soit  une suite de nombres réels de moyenne arithmétique  .

On pose  .

Exprimer  en fonction des différences où le couple  décrit$\left⟦\left(1, n\right)\right⟧²$.

Même problème pour les couples  vérifiant de plus *i* < *j*.

Quelles sont les suites telles que  ?

**5. Drôle d’équation**

Les nombres *a* et *b* sont deux réels strictement positifs tels que  est un nombre rationnel.

Montrer que *a* = *b* = 1.

**6. Approximations du nombre π**

1. ***a.*** Soit  un nombre réel vérifiant $0\leq θ <π$ . Etablir les formules suivantes :

** ,  ,  .**

1. On définit par récurrence la suite  en posant  et, pour tout entier naturel non nul *n*,  . Montrer que, pour tout entier *n*, .
2. Pour *n* valant successivement 0, 1, 2, 3 et 4, donner des expressions par « radicaux empilés » de . En donner des valeurs approchées numériques.
3. Pour tout entier n non nul, exprimer  et  en fonction de  .
4. **Méthode d’Archimède**
5. Etablir que, pour tout , $\sin(x)\leq x\leq \tan(x)$
6. En déduire que pour tout entier *n*, on a  :$6×2^{n}\sin(\frac{π}{6×2^{n}}\leq π\leq )6×2^{n}\tan(\frac{π}{6×2^{n}})$ .
7. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de en considérant un cercle  et deux polygones réguliers à  sommets respectivement inscrits dans  et circonscrit à  ?
8. Appliquer pour obtenir un encadrement de  .
9. Les inégalités permettent-elles de calculer  à une précision arbitraire ?
10. **Méthode de Snellius**
11. Etudier les variations de la fonction *f* définie sur  par .
12. En déduire que, pour tout , .
13. Montrer que, pour tout  , $x\leq \frac{2}{3}\sin(x)+\frac{1}{3}\tan(x)$ .
14. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a :

 $\frac{18×2^{n}\sin(\left(\frac{π}{6×2^{n}}\right))}{2+\cos(\left(\frac{π}{6×2^{n}}\right))}\leq π\leq 2^{n+1}\left(2\sin(\frac{π}{6×2^{n}})+\tan(\frac{π}{6×2^{n}})\right)$

Puis, pour tout entier *n*, expliciter  en fonction de  .

1. En appliquant , obtenir un encadrement numérique de .
2. Déterminer la limite en 0 de  puis de  où  .
3. On note  (respectivement  ) l’amplitude de  (respectivement ).

Déterminer la limité de  . Que peut-on en déduire concernant les méthodes d’Archimède et de Snellius ?

**3. Thème : Calculs et ordre dans R**

**1. Une majoration**

Trouver le plus petit réel *M* tel que $\left|ab\left(a²-b²\right)+bc\left(b²-c²\right)+ca\left(c²-a²\right)\right|\leq M\left(a²+b²+c²\right)$ soit vérifiée pour tous nombres réels *a*, *b* et *c*.

*47e OIM*

**2. Une inégalité**

***a.*** Démontrer que pour tous réels ,  et  strictement positifs $\frac{α}{β+γ}+\frac{β}{γ+α}+\frac{γ}{α+β}\geq \frac{3}{2}$.

***b.*** En déduire que pour tous réels *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z* tels que $a\geq b\geq c>0$ et $x\geq y\geq z>0$, on a :

$$\frac{a²x²}{\left(by+cz\right)\left(bz+cy\right)}+\frac{b²y²}{\left(cz+ax\right)\left(cx+az\right)}+\frac{c²z²}{\left(ax+by\right)\left(ay+bx\right)}\geq \frac{3}{4}$$

et préciser le cas d’égalité.

**3. L’égalité pour beaucoup, pas pour tous**

***a.*** Montrer que, pour tous nombres réels *x*, *y* et *z* différents de 1 et vérifiant  , on a :

$\frac{x²}{\left(x-1\right)^{2}}+\frac{y²}{\left(y-1\right)^{2}}+\frac{z²}{\left(z-1\right)^{2}}\geq 1$.

***b.*** Montrer qu’il existe une infinité de triplets de nombres rationnels réels *x*, *y* et *z* différents de 1 et vérifiant  pour lesquels l’inégalité ci-dessus est une égalité.

*OIM 2008*

 **4. Un minimum**

***a.*** Montrer que pour tous réels strictement positifs *u*, *v*, *x* et *y*, $\frac{x²}{u}+\frac{y²}{v}\geq \frac{\left(x+y\right)²}{u+v}$

***b.*** On considère un entier *n* et 2*n* réels strictement positifs  et  tels que les sommes $a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n} $et $b\_{1}+b\_{2}+…+b\_{n}$ soient égales à 1.

Trouver la plus petite valeur de  .

*Entrainement OIM 2004*

**5. Calcul littéral**

Montrer que, pour tous nombres réels *x*, *y* et *z* tels que $\geq 1$ , on a :

$\frac{x^{5}-x^{2}}{x^{5}+y²+z²}+\frac{y^{5}-yx^{2}}{y^{5}+z²+x²}+\frac{z^{5}-z^{2}}{z^{5}+x²+y²}\geq 0$ .

(on pourra d’abordmontrer que, pour tous nombres réels *x*, *y* et *z* tels que $\geq 1$ , $\frac{x^{5}-x^{2}}{x^{5}+y²+z²}\geq \frac{x^{5}-x^{2}}{x^{5}+x^{3}y²+x^{3}z²}$)

*46e OIM*

**6. Un produit**

On donne un entier *n* supérieur à 3. On pose :

$$N= \frac{2^{3}-1}{2^{3}+1}×\frac{3^{3}-1}{3^{3}+1}×\frac{4^{3}-1}{4^{3}+1}×… ×\frac{\left(n-1\right)^{3}-1}{\left(n+1\right)^{3}+1}×\frac{n^{3}-1}{n^{3}+1}$$

Exprimer *N* sous la forme d’un quotient irréductible d’entiers. *N* a-t-il une limite lorsque n tend vers l’infini ?

**4. Thème : Angles et distances**

**1. Sphère tangente aux faces d’un octaèdre**

Déterminer le rayon de la sphère tangente aux huit faces d’un octaèdre de côté 1.

**2. Recherche d’un minimum**

Soit ABC un triangle et M un point du segment [BC]. Par les points B et C, on mène les parallèles à la droite (AM) qui coupent les droites (AB) et (AC) respectivement en N et P.

Déterminer tous les points M de [BC] tels que $\frac{BP+CN}{AM}$ soit minimal.

**3. La grande médiane**

Soit ABC un triangle dont le périmètre est 2. Démontrer que parmi ses trois médianes, l’une au moins a une longueur supérieure ou égale à  . (On pourra noter *a*, *b* et *c* les longueurs respectives BC, CA et AB et utiliser le théorème de la médiane : si  désigne la longueur de la médiane issue du sommet A, alors  ).

**4. Trapèze à diagonales perpendiculaires**

On considère un quadrilatère ABCD possédant les propriétés suivantes :

- Les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (AB) et (BC)

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

Démontrer que l’aire de ABCD est supérieure ou égale à BC².

**5. Majoration de l’aire d’un quadrilatère convexe**

Soit ABCD un quadrilatère convexe d’aire *S*. On pose AB = *a*, BC = *b*, CD = *c* et DA = *d*.

Montrer que $4S\leq a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}.$

On étudiera de plus les cas d’égalité.

**6. Ne dites pas « la formule du héron »**

***a.*** Montrer que si x, y et z sont des réels positifs ou nuls alors

$xyz\geq \left(y+z-x\right)\left(z+x-y\right)\left(x+y-z\right)$ .

***b.*** Sur le cercle trigonométrique, on inscrit un triangle dont les côtés sont mesurés par *a*, *b* et *c*. Montrer que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 1$.

|  |
| --- |
|  |
| ***Traduction française de la « Synthèse mathématique » de Claude Ptolémée******dite « Almageste » (la grande)*** |

 (on rappelle la formule de Héron d’Alexandrie : si, de plus, *p* désigne le demi- périmètre du triangle, alors  ).

**7. Théorème de Ptolémée**

***a.*** Soit *a*, *b*, *c* et *d* quatre nombres complexes quelconques. Vérifier que :

 .

***b.*** Soit A, B, C, D quatre points du plan non alignés et distincts. Démontrer que.

 $AC.BD\leq AB.CD+AD.BC $.

***c.*** Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le quadrilatère ABCD pour que

$AC.BD=AB.CD+AD.BC $

**8. Partage de cercles**

On donne deux triangles rectangles d’aires respectives  et  tels que le cercle inscrit dans le premier soit le cercle circonscrit au second. Montrer que$\frac{S}{S'}\geq 3+2\sqrt{2}.$

*Entrainement OIM 2005*

**5. Thème : Logique, dénombrement, probabilités**

**1. Duel de dames**

Quelle est la probabilité pour que deux dames placées au hasard sur un échiquier soient une menace directe l’une pour l’autre ?

**2. « Il en reste toujours qui ne vont pas ensemble »**

On sépare puis on mélange *n* paires de chaussettes distinguables au premier regard, *n* désignant un entier naturel non nul. On tire au hasard et une à une ces chaussettes en reformant une paire de chaussettes dès que les deux éléments la constituant ont été tirés. Soit *k* un nombre entier inférieur ou égal à 2*n* et  la variable aléatoire indiquant le nombre de paires formées après le tirage de *k* chaussettes. Calculer l’espérance de .

**3. Centre du cercle circonscrit à un triangle**

Soit (C) un cercle de centre O et A, B, C trois points choisis au hasard sur ce cercle.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d’origine O et on note *r* le rayon du cercle (C).

On désigne alors respectivement par  , et les affixes de A, B, C.

 ,  ,  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi uniforme sur  .

***a.*** Déterminer la probabilité que O soit intérieur au triangle ABC.

***b.*** Déterminer la probabilité que le triangle ABC soit acutangle (dont aucun angle n’est obtus).

**4. Chute sur le carreau**

On jette une pièce de monnaie de diamètre *d* sur un carrelage formé de carrés de côté *l*. On suppose que  et que la largeur des joints est négligeable. Déterminer, pour *n* valant successivement 0, 1, 2, 3, 4 la probabilité que la pièce rencontre exactement *n* joints.

**5. Abonné**

Un cinéphile a vu 25 films en 2014, assistant à au plus une séance par jour, selon les hasards de la programmation et de ses humeurs. Quelle est la probabilité qu’il ait vu un film au moins deux jours de suite ?

**6. Problème de semis**

Soit *m* un entier naturel et *n* un entier naturel non nul. On répartit au hasard *m* boules dans *n* urnes : pour chaque boule, on choisit avec la probabilité  l’urne dans laquelle on la place, les choix s’effectuant de façon indépendante.

***a.*** Soit *k* un entier inférieur à *n*. Quelle est la probabilité que les urnes numérotées 1, 2, … , *k* soient vides ?

***b.*** En déduire la probabilité que chacune des urnes contienne au moins une boule. Préciser le résultat lorsque 

***c.*** On note *X* la variable aléatoire indiquant le nombres d’urnes vides au terme de cette répartition. Calculer  , l’espérance de *X*.

Lorsque , déterminer la limite quand *n* tend vers l’infini de  .

**6. Thème : Fonctions**

**1. Une équation fonctionnelle**

Déterminer les fonctions réelles *f* d’une variable réelle, deux fois dérivables, telles que, pour tout couple  de réels, l’égalité  est vérifiée.

(on pourra montrer que la fonction  est telle que, pour tout réel $x$,  )

**2. Étude qualitative d’une équation différentielle**

Soit *f* une fonction deux fois dérivable sur **R** et telle que, pour tout réel *x* :  .

Confirmer ou infirmer les deux assertions suivantes :

Assertion 1 : Si  alors 

Assertion 2 : Si  alors .

(la notation  signifie que pour tout réel $x$, )

**3. Une équation**

Déterminer tous les réels *a* pour lesquels il existe une unique application *f* définie de **R\*** dans **R**et telle que, pour tout réel  :  .

**4. Des hauts et des bas**

La fonction *f* définie sur **R** par  est-elle périodique ?

**5. À rappeler : la définition de la fonction partie entière**

Trouver toutes les applications *f* définies sur R, périodiques de période 1 et telles que, pour tout réel *x* :

$\left|f\left(x\right)-x+E\left(x\right)\right|$ $\leq \frac{1}{1+x²}$, où $E\left(x\right)$ désigne la partie entière de *x*.

**6. Changement homographique de variable**

On dit qu’une fonction *f* est une fonction homographique s’il existe des réels a*, b, c* et *d* vérifiant  tels que pour tout réel  ,  . On se propose de déterminer l’ensemble E des fonctions *f* définies sur **R** et continues en  telles que, pour tout réel *x* différent de ,  .

***a.*** Soit *h* la fonction  . Vérifier que, sauf pour un nombre fini de valeurs de *x*, que l’on précisera :  .

En déduire l’existence d’une fonction homographique $l$ telle que, pour tout *x*, sauf un nombre fini de valeurs :  . Que peut-on dire de la fonction  ?

***b.*** Déterminer l’ensemble E.