**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2021-2022 Stage « filé »**

**Classe de seconde Fiche numéro 1**

**Parution lundi 8 novembre Retour attendu pour le lundi 22 novembre**

**Exercice n°1 … de l’origine des inégalités**

Définition : on dit qu’un nombre est inférieur ou égal à un nombre lorsque .

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Soit et des nombres réels

Théorème 1 : si alors et si et alors .

(si alors donc, comme ,

soit )

Théorème 2 :

Si et alors

Si et alors

Si et alors .

Théorème 3 :

Si alors .

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l’un au moins de ces théorèmes.

Démontrer la deuxième partie du théorème 1 ainsi que les théorèmes 2 et 3.

Théorème 1 :

si et alors et .

Or . La somme de deux nombres positifs ou nuls est positive ou nulle donc , soit .

Théorème 2 :

Si (c’est-à-dire comme alors :

- si alors soit

- si alors soit

et si et, alors comme , et comme , d’où .

Théorème 3 :

donc si , alors et d’où et soit .

**Exercice 2 Encadrements**

On considère un rectangle de largeur et de longueur . On sait que et .

***a.*** Trouver un encadrement du périmètre du rectangle. Traduire cet encadrement par l’appartenance à un intervalle du type .

Préciser l’amplitude de cet encadrement.

***b.*** Trouver de même un encadrement de l’aire du rectangle. Préciser l’amplitude de cet encadrement.

Peut-on en déduire que ?

***a.*** et . En additionnant membre à membre les inégalités (théorème 1)

soit

Soit, en multipliant par 2 (qui est positif) les deux membres de l’inégalité, .

Comme , ceci signifie que .

On dit que 60 est une *valeur approchée* de à la précision 0,04.

L’amplitude de cet encadrement est 0,08.

***b****.*  et donc en multipliant membre à membre les inégalités (théorème 2)

soit .

L’amplitude de cet encadrement est 0,6 ().

Pour autant, comme ), on ne peut affirmer que . On pourrait par exemple avoir .

**Exercice 3 Multiples et diviseurs**

Définition : On dit qu’un nombre entier est un *multiple* d’un nombre entier s’il existe un nombre entier 𝑘 tel que .

On dit alors que est un *diviseur* de ou que est *divisible* par .

Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d’écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu’il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

On admettra le théorème suivant

Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit et deux entiers naturels tels que , alors il existe un unique couple d’entiers naturels tels que et .

***a.*** Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

***b.*** Montrer que si l’écriture décimale d’un nombre est et celle d’un nombre est alors le nombre est divisible par 11.

***c.*** Montrer que si l’écriture décimale d’un nombre est et si alors le nombre A est divisible par 9.

***d.*** Montrer que pour tous nombres entiers et , le produit est un multiple de 3.

(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de et par 3).

***e.*** Montrer que pour tout entier , est divisible par 2 et par 3.

***f.*** Montrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est un multiple de 48.

***a.*** Un nombre est impair s’il existe un entier tel que . Deux entiers impairs consécutifs peuvent donc s’écrire et . Leur somme s’écrit

On a donc bien un multiple de 4.

***b.***  et d’où et est un multiple de 11 c’est-à-dire divisible par 11.

***c.***  donc est un multiple de 9 c’est-à-dire divisible par 9.

***d.*** Si ou est multiple de 3, il existe un entier tel que et donc où est l’entier .

Sinon, les restes dans la division de et par 3 sont 1 ou 2, ce qui donne quatre cas à étudier et il suffit pour chaque cas d’avoir un des nombres du produit multiple de 3 pour que soit multiple de 3. S’il existe deux entiers et tels que :

* et alors est multiple de 3 car
* et alors est multiple de 3 car
* et alors est multiple de 3 car
* et alors est multiple de 3 car

***e.*** et sont deux entiers consécutifs donc l’un des deux est pair. Le produit est donc multiple de 2.

On raisonne ensuite comme dans la question précédente en considérant les restes dans la division euclidienne de par 3. S’il existe un entier tel que :

* alors le produit est multiple de 3 ;
* alors et le produit est multiple de 3 ;
* alors et le produit est multiple de 3.

Dans tous les cas le théorème admis nous permet d’affirmer que le produit est multiple de 6.

***f.*** Soit trois nombres pairs consécutifs. Il existe un entier tel que ces trois nombres s’écrivent .

Leur produit s’écrit alors .

Le produit de deux entiers consécutifs est multiple de 2 puisque parmi les deux il y en a un qui est pair donc est multiple de 2.

De plus, en considérant les restes dans la division euclidienne de par 3, on montrerait que parmi trois entiers consécutifs, l’un est un multiple de 3 donc est un multiple de 3.

Comme précédemment, on en déduit que est un multiple de .

**Exercice 4 Développement décimal d’un nombre rationnel**

Propriété : : soit et deux entiers tels que . Le développement décimal du nombre rationnel est fini (nombre décimal) ou infini mais périodique à partir d’un certain rang.

On peut procéder par divisions euclidiennes successives :

et , et , et , et , …

Alors

***a.*** Expliquer pourquoi il suffit de connaitre le développement décimal de jusqu’à la 7e décimale pour connaitre entièrement ce développement décimal. Déterminer la période « à la main ».

***b.*** Combien de décimales au maximum suffit-il calculer pour connaitre le développement décimal de  ?

***a.*** Pour avoir les premières décimales, on procède à des divisions euclidiennes successives par 7, chaque reste devant être strictement inférieur à 7, ce qui donne 7 possibilités (0, 1, …, 6). On finit donc dans le processus par retrouver un reste déjà obtenu et reproduire alors les mêmes calculs :

, , , , , , et on reprend les mêmes calculs.

On a donc .

***b.*** En appliquant le même raisonnement, on peut affirmer qu’il suffit d’au maximum 13 décimales pour avoir le développement décimal de .

***c.*** On peut montrer qu’en fait le développement décimal de est

**Exercice 5 Racines carrées**

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** et :

* ;
* . En particulier ;
* .

Ce théorème est à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

**1.** Montrer que pour tous réels positifs ou nuls, on a

En déduire que pour tous réels positifs ou nuls , on a

**2.** Montrer que pour tout , il existe un entier tel que

**3. *a.*** Montrer que pour tout entier , .

***b.*** Pour tout entier supérieur ou égal à 2, comparer et

***c.*** Déterminer le plus petit entier naturel tel que .

***d.*** Déterminer le plus petit entier naturel tel que .

**1.** Deux nombres positifs ou nuls sont rangés dans le même ordre que leur carrés (conséquence du théorème « Si et alors  »). On compare donc et en étudiant le signe de leur différence :

car

Donc qui est un nombre positif ce qui permet d’affirmer que .

On a de même et z. En multipliant membre à membre les trois inégalités, puisque tous les nombres sont positifs ou nuls, on en déduit que :

soit

C’est-à-dire car et sont positifs ou nuls.

**2.** Pour ,

Pour ,

Pour ,

Soit .

Pour ,

Soit

Pour ,

**3. *a.*** Pour tout entier , .

***b.***  et .

Or, comme , d’où .

On en déduit que .

***c.*** Comme , on est ramené à chercher le plus petit entier naturel tel que . Comme , le plus petit entier naturel qui convient est .

***d.*** Soit .

On peut aussi écrire

La plupart des termes se simplifient deux à deux et

équivaut donc à soit .