**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2022-2023 Stage « filé »**

**Classe de seconde Fiche numéro 3**

**Parution lundi 13 février Retour attendu pour le jeudi 16 mars**

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

* Le milieu d’un segment est caractérisé par l’une des égalités vectorielles suivantes :

ou ou, pour un point M du plan, .

* La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l’alignement de trois points.
* L’égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
* La relation de Chasles facilite les calculs.

**Exercice 1**

Soit ABCD un parallélogramme. On note I le milieu du segment [AB] et on considère le point E du segment [ID] tel que .

Montrer que les points A, E et C sont alignés.

|  |  |
| --- | --- |
| Le point E est sur le segment [ID] et tel que . On en déduit que  .  Alors, comme I est le milieu du segment [AB],  Soit .  Soit |  |

Comme ABCD est un parallélogramme, d’où .

On en déduit que les points A, E et C sont alignés.

**Exercice 2 – le trapèze complet**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre ABCD est un trapèze convexe de bases [AB] et [DC].  Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point E.  I et J désignent les milieux respectifs de [AB] et [CD].  F est le point d’intersection des droites (AC) et (BD).   1. ***a.***  Expliquez pourquoi il existe un réel tel que . Préciser le signe de .   ***b.*** Montrer que et .   1. ***a.***  Expliquez pourquoi il existe un réel tel que . Préciser le signe de .   ***b.*** Montrer que et .   1. Que peut-on dire des points E, F, I et J ? |  |

1. ***a.***  Les points E, D et A sont alignés donc les vecteurs et sont colinéaires et il existe bien un réel tel que . (si D est sur le segment [EA], comme sur la figure, on peut même préciser ).

***b.*** Les triangles EDC et EAB ont l’angle E en commun et les angles et de même mesure (angles correspondants puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles). Ces triangles sont donc semblables. On en déduit que d’où, puisque , .

Comme , on peut alors écrire .

Le point I est le milieu de [AB] et le point J est le milieu de [CD] donc .

1. ***a.***  Les points A, F et C sont alignés dans cet ordre donc les vecteurs et sont colinéaires et il existe bien un réel tel que . De plus, comme F est sur le segment [AC], .

***b.*** Les triangles DFC et BFA ont leurs angles en F de même mesure (angles opposés par le sommet) et les angles et de même mesure (angles alternes internes puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles).

Ces triangles sont donc semblables. On en déduit que d’où, puisque , .

Comme , on peut écrire .

Le point I est le milieu de [AB] et le point J est le milieu de [CD] donc .

1. donc les points E, I et J sont alignés et donc les points F, I et J sont alignés.

On en déduit que les points E, F, I et J sont alignés.

**Exercice 3**

Un repère est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs et sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs et sont colinéaires s’il existe un réel tel que ou .

Théorème : dans le plan muni d’un repère orthonormé, les vecteurs et sont colinéaires si et seulement si

Définition : dans le plan muni d’un repère orthonormé, le déterminant du couple de vecteurs où et sont les vecteurs de coordonnées respectives et est le nombre .

L’introduction d’un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s’appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
2. Démontrer que si les vecteurs et sont colinéaires alors
3. Démontrer que les vecteurs et sont tels que alors ils sont colinéaires.

(on pourra traiter à part le cas où l’un au moins des vecteurs est nul)

1. Application

Soit ABCD un rectangle et M un point du segment [BD]. On considère le symétrique N du point C par rapport à M.

La parallèle à (AD) passant par N coupe (AB) en P et la parallèle à (AB) passant par N coupe (AD) en Q.

L’objectif est de montrer que les points M, P et Q sont alignés. Pour cela on se place dans le repère orthonormal où et .

1. Précisez les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.
2. Justifier l’existence d’un réel tel que Déterminer les coordonnées du point M puis celles des points N, P et Q en fonction de .
3. Conclure.
4. ***a.*** Si et sont colinéaires, alors il existe un réel tel que ou . Si alors d’où . Par symétrie, si alors .
5. Si et sont tels que alors :

* Soit l’un des vecteurs est nul : si alors 0 et si alors 0 donc et sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)
* Soit aucun des vecteurs n’est nul. Comme , on a ou . Si , comme , si on pose alors et . Sinon, et en posant , l’égalitédonne et on retrouve .

Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs et sont colinéaires.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ***a.*** Dans le repère , orthonormal puisque ABCD est un rectangle et , on a   (car . Donc, si et alors ce qui donne et de même pour D).   1. Comme M est un point de [BD], les vecteurs et sont colinéaires. Il existe donc bien un réel tel que . Cela se traduit par le système :   soit .  N est le symétrique de C par rapport à M donc ce qui se traduit par le système : |  |

soit soit .

Le point P est sur la parallèle à (AD) (axe des ordonnées) passant par N donc et il est sur la droite (AB) (axe des abscisses) donc .

De même, et .

1. On en déduit les vecteurs et soit .

On en déduit que les points P, Q et M sont alignés.

**Exercice 4**

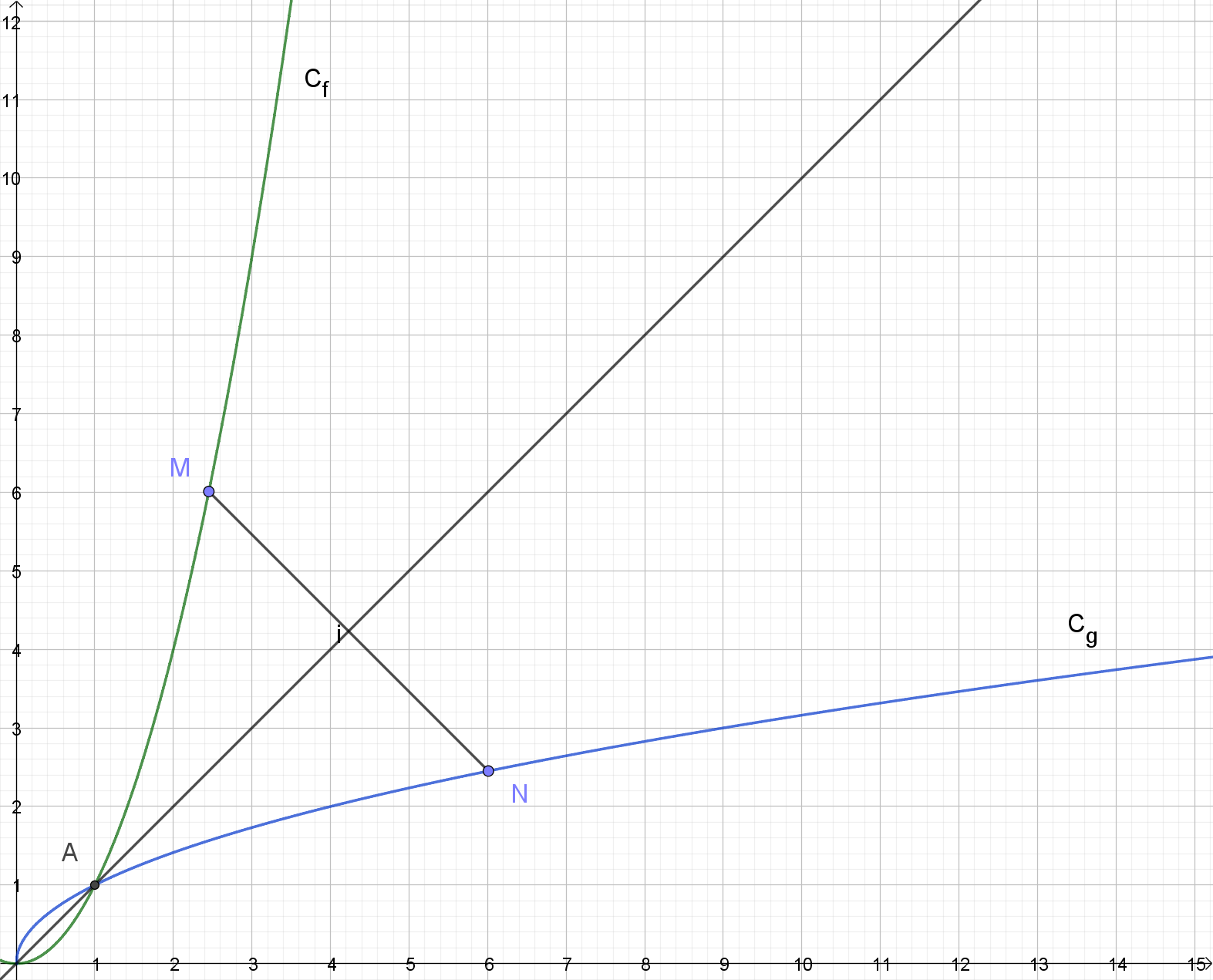
Définition : un point M’ est le symétrique d’un point M par rapport à une droite lorsqu’il est sur cette droite ou lorsque la droite est la médiatrice du segment [MM’].

Définition : la courbe représentative d’une fonction est l’ensemble des points où prend toutes les valeurs pour lesquelles existe (ensemble de définition de la fonction)

Soit et les fonctions définies sur par et . On note et les courbes représentatives respectives de et dans un repère orthonormal

1. Tracer et et déterminer leurs points d’intersection. On notera A celui d’abscisse strictement positive.
2. Soit un réel positif ou nul, M le point de d’abscisse et N le point de d’abscisse . Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA).
3. Que peut-on en déduire pour les courbes et ?
4. L’abscisse des points d’intersection des deux courbes représentatives et , s’ils existent, sont les solutions de l’équation soit ( et ) soit (car l’égalité entraine )  soit ou .

Il n’y a donc que deux points d’intersection : l’origine O du repère et le point A.



1. Soit un réel positif. M est le point de d’abscisse et N est le point de d’abscisse . On a donc et (car si , alors ).

Si M est sur la droite (OA) alors M = O ou M = A et dans les deux cas N = M car alors .

Si M n’est pas situé sur la droite (OA), alors montrons que cette droite est la médiatrice de [MN] en montrant que les points O et A sont tous les deux équidistants de M et N.

On a et donc

et .

La droite (OA) est donc bien la médiatrice de [MN].

1. est l’ensemble des points M lorsque prend toutes les valeurs positives ou nulles. Le symétrique N du point M par rapport à la droite (OA) est alors un point de . Réciproquement, pour tout point de tel que et si on pose alors et Q est le symétrique du point de .

On peut donc affirmer que les courbes et sont symétriques par rapport à la droite (OA).

**Exercice 5**

Définition : on dit qu’une fonction admet un minimum (respectivement un maximum) en sur un ensemble lorsque pour tout réel de , (respectivement . Le nombre est alors le minimum (respectivement maximum) de sur.

Définition : une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur un **intervalle I** lorsque pour tous réels et de I, si alors (respectivement ).

On rappelle que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence de ces deux nombres.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que et . Soit M un point du segment [AB], N le point d’intersection de la parallèle à (AC) passant par M avec la droite (BC) et P le point d’intersection de la parallèle à (AB) passant par N avec la droite (AC). On note

1. Exprimer la distance MN en fonction de . Dans quel intervalle varie le nombre  ?
2. ***a.*** Montrer que si désigne l’aire du quadrilatère AMNP en fonction de , alors .
   1. Montrer que cette aire est maximale pour et déterminer ce maximum.
3. Etudier les variations, sur [0,4], de la fonction qui à associe le périmètre du quadrilatère AMNP. Quelle son maximum ?

|  |  |
| --- | --- |
| 1. On commence par remarquer que par construction le quadrilatère AMNP a ses côtés deux à deux parallèles et un angle doit. C’est donc un rectangle. De plus, les triangles ABC et MBN ont l’angle en B en commun et sont rectangles tous les deux. Ce sont donc des triangles semblables d’où   Soit .  Comme M appartient au segment [AB], .  Remarque : on dit que lorsque M *décrit* le segment [AB], *décrit* l’intervalle . |  |

1. ***a.*** Comme AMNP est un rectangle, .
   1. Pour tout , .

Un carré étant toujours positif, pour tout , . Donc l’aire admet un maximum en 2 (c’est-à-dire lorsque M est le milieu de [AB]) et ce maximum vaut .

1. Pour tout , . Pour tous réels et de , . Si alors donc .

On en déduit que la fonction est croissante sur et que son maximum est lorsque , ce qui correspond à un rectangle aplati donc d’aire minimale.

**Exercice 6**

Pour montrer que deux nombres et sont égaux, on peut montrer que .

Pour tous nombres réels et tels que et ,équivaut à .

On considère quatre nombres réels non nuls tels que .

Démontrer que : (i) (ii)

(On se place dans la situation où tous ces quotients sont bien définis.)

équivaut à .

1. Montrons que , ce qui équivaut à

Or

On a donc bien .

1. Montrons maintenant que .

équivaut à et équivaut aussi à . On a donc bien .

équivaut à .

Or

On a donc bien .