**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2024-2025 Stage « filé »**

**Classe de seconde Fiche numéro 3**

**Parution lundi 10 mars Retour attendu pour le lundi 31 mars**

**Exercice 1 – Calcul littéral et inégalités**

Le calcul littéral s’appuie sur plusieurs propriétés algébriques, notamment :

* les identités remarquables ;
* les propriétés opératoires sur les nombres rationnels.

Pour montrer que deux nombres et sont égaux, on peut :

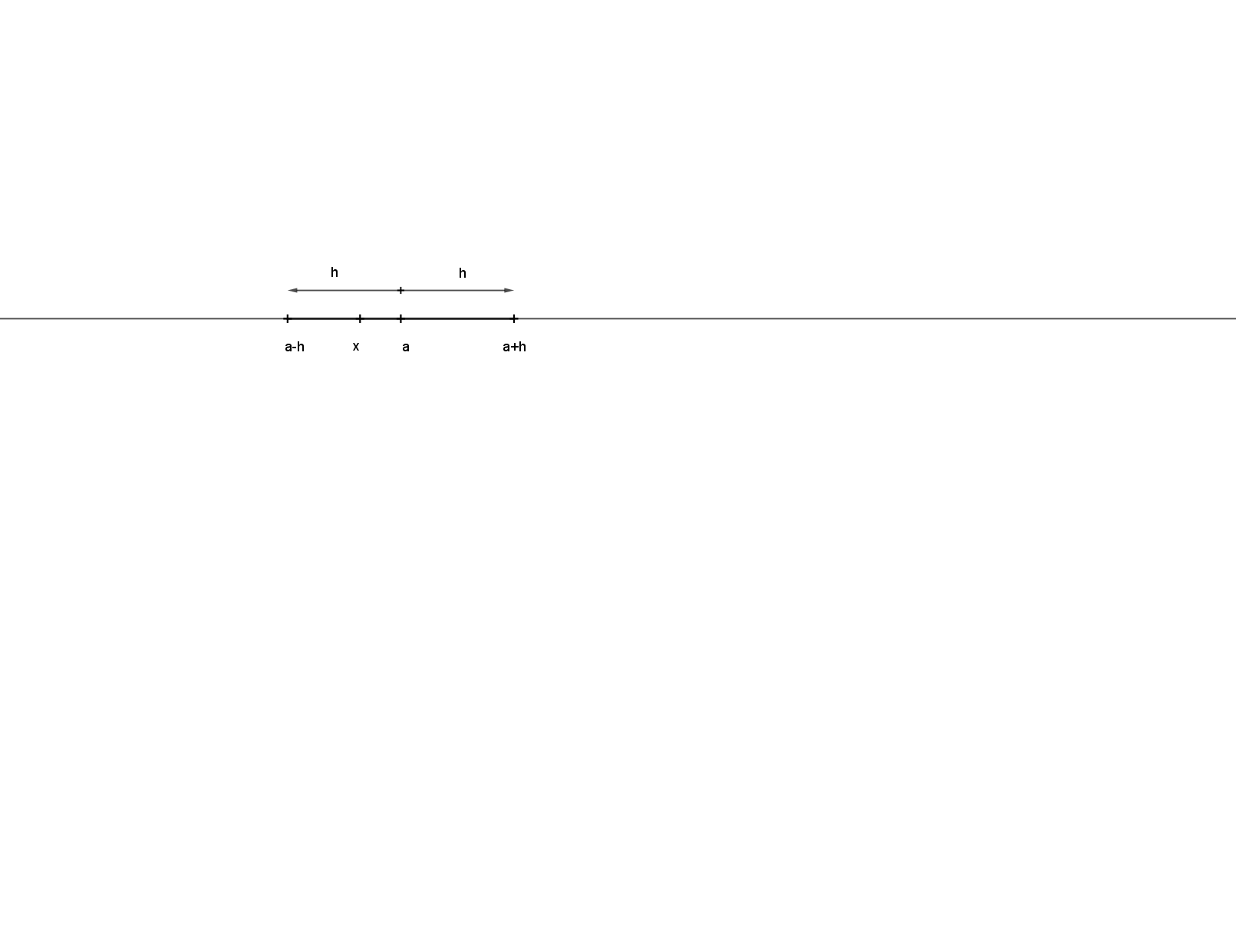
* montrer que .

ou

* montrer que et .

Des valeurs particulières peuvent aboutir à une conjecture qui ne devient une propriété qu’à l’issue d’une démonstration dans le cas général, c’est-à-dire pour des **nombres quelconques**.

Définition : soit et deux nombres réels et soit un réel strictement positif. On dit que est une valeur approchée de à la précision (ou « à près ») lorsque .



On obtient un encadrement de de longueur .

1. **a.** Soit et deux nombres réels, compléter l’égalité .

**b.** En déduire le signe de pour tous nombres réels et .

1. **a.** Ecrire chacun des produits suivants comme quotient de deux entiers naturels et , :

, .

1. Vérifier que pour tout entier naturel , .
2. En déduire, que, pour tout entier naturel ,

.

1. Ecrire le produit comme quotient de deux entiers naturels et , . Quelle valeur la calculatrice affiche-t-elle pour ?
2. Déterminer à partir de quel entier naturel , le nombre est une valeur approchée de à près.
3. **a.**  soit

**b.**  Un carré est toujours positif. On en déduit que, pour tous nombres réels et , et d’où

.

1. **a.** ,

.

**b.** Pour tout entier naturel ,.

**c.**  Pour tout entier naturel , d’après la question précédente :

On peut constater que, sauf pour le premier et le dernier quotient, les quotients peuvent être regroupés par paires dont le produit vaut 1, donc .

**d.** D’après le **c.**, .

**e.** On remarque déjà que, comme qui est un nombre positif, pour tout entier naturel non nul , .

De plus, est une valeur approchée à près de si et seulement si soit soit .

**Exercice 2 – Fonctions et inégalités**

Définition : on dit qu’un nombre est inférieur ou égal à un nombre lorsque .

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriétés :

1. Soit et deux réels positifs, si et seulement si .
2. Soit et deux réels positifs, si et seulement si .

Définition : on dit qu’une fonction admet un minimum (respectivement un maximum) en sur un ensemble lorsque pour tout réel de , (respectivement . Le nombre est alors le minimum (respectivement maximum) de sur.

1. Représenter dans un repère orthonormé les fonctions et définies sur par et .

On notera respectivement et les courbes représentatives de et .

1. Soit . On note M et N les points d’abscisse qui appartiennent respectivement à et .
   1. Étudier, graphiquement puis algébriquement, le signe de l’expression .
   2. Exprimer en fonction de la distance MN. On note cette distance.
   3. Démontrer que la fonction admet un maximum en et déterminer la valeur de ce maximum.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. **a.** Étude graphique :   Le signe de c’est-à-dire de est donné par la position relative des points et .  Sur tout l’intervalle , la courbe est située au-dessus de la courbe .  Graphiquement, sur tout l’intervalle .  Étude algébrique :  .  Or, si , alors d’après la propriété (2), soit .  Donc, pour tout , et  d’où .  **b.** Comme , .  **c.** Pour tout , |

Soit . On en déduit que, pour tout , ce qui signifie que la fonction admet un maximum en . Ce maximum est .

**Exercice 3 – Problèmes d’alignement et de parallélisme**

Propriété : soit et deux points distincts du plan. Pour tout point du plan, il existe un unique point du plan tel que .

C’est cette propriété qui permet de placer des points à partir d’égalités vectorielles.

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

* La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l’alignement de trois points.
* L’égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
* La relation de Chasles facilite les calculs.

*Les deux questions 1. et 2. ci-dessous sont indépendantes.*

1. Soit un triangle. On considère les points et tels que :

est le milieu du segment , et .

* 1. Exprimez le vecteur en fonction du vecteur puis le vecteur en fonction du vecteur .
  2. Faire une figure
  3. Montrer que les points sont alignés.

1. Soit un triangle et soit un point du plan. On considère les points et tels que :

et .

* 1. Faire une figure. On pourra s’aider d’un papier quadrillé.
  2. Montrer que .
  3. Montrer que les droites et sont parallèles.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **a.** s’écrit aussi soit c’est-à-dire   .  s’écrit aussi soit  C’est-à-dire soit .  Ces deux égalités permettent de placer les points et .   1. On va montrer que les points sont alignés en montrant que les vecteurs et sont colinéaires en les exprimant tous les deux en fonction des vecteurs et .   car I est le milieu du segment .  De même |  |

Soit . On constate que . On en déduit que les vecteurs et sont bien colinéaires et donc que les points sont alignés.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **a.** | **b.**  Or donc  d’où soit .   1. Par définition,   Soit, d’après le **b.**,  C’est-à-dire .  Les vecteurs et sont colinéaires donc les droites et sont parallèles. |

**Exercice 4 – Colinéarité en géométrie analytique**

Un repère est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs et sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs et sont colinéaires s’il existe un réel tel que ou .

Théorème : dans le plan muni d’un repère, les vecteurs et sont colinéaires si et seulement si

Définition : dans le plan muni d’un repère, le déterminant du couple de vecteurs où et sont les vecteurs de coordonnées respectives et est le nombre .

L’introduction d’un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s’appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
2. Démontrer que si les vecteurs et sont colinéaires alors
3. Démontrer que si les vecteurs et sont tels que alors ils sont colinéaires.

(on pourra traiter à part le cas où l’un au moins des vecteurs est nul)

1. Application

Soit ABCD un carré de côté . On construit à l’intérieur du carré ABCD le triangle équilatéral ABE et à l’extérieur du carré ABCD le triangle équilatéral CBF. On veut montrer que les points D, E et F sont alignés.

1. Justifier que si on pose et alors est un repère orthonormal.
2. Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.
3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.
4. Démonstration du théorème

***a.*** Si et sont colinéaires, alors il existe un réel tel que ou . Si alors d’où . Par symétrie, si alors .

1. Si et sont tels que alors :

* Soit l’un des vecteurs est nul : si alors 0 et si alors 0 donc et sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)
* Soit aucun des vecteurs n’est nul. Comme , on a ou . Si , comme , si on pose alors et . Sinon, et en posant , l’égalitédonne et on retrouve .

Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs et sont colinéaires.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. a. Comme ABCD est un carré de côté a, les vecteurs et sont à la fois orthogonaux et de norme 1 donc est un repère orthonormal. 2. Dans ce repère, . On a donc .   ABE est un triangle équilatéral et situé à l’intérieur du carré ABCD donc l’ordonnée de E est positive et vaut EK où K est le milieu de [AB] et son abscisse est celle de K c’est-à-dire .  La hauteur d’un triangle équilatéral de côté vaut (se retrouve en |  |

appliquant le théorème de Pythagore au triangle AKE rectangle en K). On a donc

Le triangle CBF est équilatéral et situé à l’extérieur du carré ABCD donc, en utilisant le calcul précédent de la hauteur d’un triangle équilatéral, on a .

1. Les points D, E et F sont alignés si et seulement si le déterminant du couple de vecteurs est nul.

Or on a et . Donc

Soit

Les points D, E et F sont donc bien alignés.

**Exercice 5 – Nombres entiers naturels**

Définition : un entier naturel est un multiple d’un entier naturel lorsqu’il existe un entier tel que .

Écriture décimale d’un entier naturel : Soit un entier décimal à quatre chiffres dont l’écriture décimale est . Cela signifie que et .

1. Montrer que le produit des trois entiers naturels consécutifs augmenté du nombre central est un cube parfait (le cube d’un entier naturel).
2. Existe-il trois entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2 025 ? Même question pour 5 entiers naturels consécutifs, puis pour 6 entiers naturels consécutifs.
3. Trouver tous les nombres à trois chiffres tels que
4. Soit un nombre à quatre chiffres et soit . On considère la différence positive entre ces deux nombres. Combien de chiffres 5 le nombre peut-il au maximum avoir ?
5. Les trois entiers naturels peuvent s’écrire . Leur produit augmenté de l’entier central (ici, ) est donc égal à .

*Remarque : il est souvent judicieux, lorsqu’on considère un nombre impair d’entiers consécutifs, de les noter*

1. On note à nouveau les trois entiers consécutifs. Leur somme est .

On aboutit à l’équation qui a bien une solution puisque 2 025, est divisible par 3 (car qui est divisible par 3). Les entiers cherchés sont 674, 675, 676.

Le même raisonnement pour 5 aboutit à soit et les entiers solutions sont 403, 404, 405, 406, 407.

En revanche, le raisonnement précédent ne peut s’appliquer pour 6 car 6 est pair. Mais les 6 entiers naturels peuvent s’écrire , ce qui conduit à l’équation soit soit . Les entiers cherchés sont donc 335, 336, 337, 338, 339 et 340.

1. L’égalité donnée signifie que

Soit . Or donc .

On en déduit que et comme , cela signifie que .

On en déduit que et toujours comme , et .

L’unique solution du problème est donc le nombre 198.

1. et

Donc . On en déduit que est multiple de 9.

La différence ne peut donc comporter quatre chiffres 5 car 5 555 n’est pas un multiple de 9 (car , qui n’est pas un multiple de 9).

Montrons que la différence peut comporter 3 chiffres 5 : .

Le nombre maximal de chiffres 5 dans l’écriture du nombre est donc bien 3.

et , qui est un multiple de 9 donc la différence peut comporter trois chiffres 5.