** Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2022-2023 Stage « filé »**

**Classe de première Fiche numéro 2**

**Parution lundi 21 novembre Retour attendu pour le lundi 12 décembre**

**Exercice 1 –** **Rencontres de paraboles**

On retrouve le sommet de la parabole d’équation a en partant de la forme canonique .

Propriété 1 : Les abscisses des points d’intersection des courbes représentatives respectives des fonctions et sont les solutions de l’équation

Propriété 2 : Soit et deux réels positifs, si et seulement si

Propriété 3 : si l’équation admet deux solutions et ,alors et .

On considère le plan muni d’un repère orthonormal.

1. Soit et les paraboles d’équations respectives et .

On appelle respectivement et les sommets des paraboles et . On suppose que ces deux paraboles se coupent en deux points P et Q. Quelle est la nature du quadrilatère PQ ?

1. Soit maintenant et les paraboles d’équations respectives et .

On appelle respectivement et les sommets des paraboles et .

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes portant sur et pour que les deux paraboles se coupent en deux points R et T et les points , R et T sont deux à deux distincts.

1. Dans le cas où et , déterminer la nature du quadrilatère RT.
2. Pour tout réel , et . On en déduit déjà et .

De plus, les abscisses des points P et Q, intersections de et sont les solutions de l’équation :

soit , équation dont les solutions sont 1 et 5.

On peut donc choisir et (échanger les rôles de P et Q ne change rien au résultat final).

On vérifie sur les coordonnées que les segments [P Q] et ont même milieu et que donc le quadrilatère PQ est un parallélogramme. On vérifie aussi qu’il n’est rien de plus (ni rectangle, ni losange).

1. En écrivant sous forme canonique, on obtient : .

La parabole a donc pour sommet . La parabole a pour sommet .

Les abscisses des points R et T, s’ils existent, sont les solutions de l’équation :

soit , équation qui admet deux solutions distinctes uniquement lorsque .

On obtient alors comme solutions et .

L’un de ces des deux points est confondu avec si et seulement si c’est-à-dire . Ils seront tous deux distincts de si et seulement si **.**

De même, l’un de ces deux points est confondu avec si et seulement si , ce qui s’écrit aussi

. Donc ces deux points seront distincts de si et seulement si **.**

Enfin les deux sommets des paraboles sont confondus si et seulement si et , ce qui sera vérifié dès que **.**

Conclusion : les quatre points existent et sont deux à deux distincts si et seulement si et .

1. Dans le cas où et , on peut choisir et on a et .

Les segments [RT] et ont pour milieu commun le point .

De plus, on a d’où l’on tire .

Enfin, on a et d’où l’on tire .

Le parallélogramme est donc un carré.

**Exercice 2 – Polynômes symétriques**

Propriété 1 : Deux polynômes et sont égaux, c’est-à-dire, pour tout réel , si et seulement si ces deux polynômes ont le même degré et leurs monômes de même degré ont les mêmes coefficients.

Propriété 2 : Un réel est racine d’un polynôme si et seulement si est factorisable par , c’est-à-dire s’il existe un polynôme tel que, pour tout réel ,

On dit qu’un polynôme de degré est *symétrique* lorsque, pour tout entier , les coefficients des monômes de degré et sont égaux.

Exemple : .

Soit et deux nombres réels tels que .

1. Pour tout réel , on pose . Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation . Dans le cas où cette équation admet deux solutions et , exprimer en fonction de .
2. Soit .
   1. Montrer que si est une solution de alors est aussi une solution de .
   2. Déterminer une solution « évidente » de .
   3. Dans le cas où et , résoudre l’équation .
3. L’équation étudiée est du second degré (et donc 0 n’en est pas une solution. Si et sont les solutions de l’équation , alors d’après la propriété 3 rappelée au début de l’exercice 1, soit .
4. a. Dire que est une solution de signifie que soit, puisque , c’est-à-dire, puisque , c’est-à-dire est solution de l’équation .

b. On remarque que donc est une solution de l’équation .

c. Si et alors et comme est solution de l’équation , on peut trouver des réels et tels que .

Comme , la propriété 1. citée au début de l’exercice permet d’écrire le système qui équivaut à et .

équivaut donc à ou , équation dont le discriminant est et dont les solutions sont et . L’équation admet donc trois solutions : .

*Remarque : on aurait pu aussi remarquer que la factorisation par donnait un polynôme symétrique dont 2 était racine « évidente » l’autre étant son inverse d’après le 2.*

**Exercice 3 – Inégalités et racines carrées**

Définition : on dit qu’un nombre est inférieur ou égal à un nombre lorsque .

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriété : Soit et deux réels positifs, si et seulement si .

Soit et deux nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que et que .
2. Montrer que .
3. Comparer et .
4. Pour tous réels et strictement positifs,

soit , .

Comme et sont strictement positifs, on peut affirmer que et

d’où .

Comme et sont strictement positifs, et existent et sont aussi strictement positifs. Les comparer revient donc à comparer leurs carrés.

qui est un nombre positif,

d’où .

1. Comme et sont positifs (puisque et sont strictement positifs), les comparer revient à comparer leurs carrés.

.

Comme les carrés sont des nombres positifs ou nuls, on en déduit que .

1. Comme et sont des réels positifs, les comparer revient à comparer leurs carrés.

.

Comme un carré est un nombre positif ou nul, on en déduit que .

**Exercice 4 – Médianes concourantes et droite d’Euler**

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu d’un segment par l’une des égalités vectorielles suivantes :

ou ou, pour un point M du plan, .

- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs

- parallélogramme par l’égalité de deux vecteurs

- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d’un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit un triangle et soit les milieux respectifs des segments . On note le point d’intersection des médianes et et le symétrique de par rapport à .
   1. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
   2. En déduire que G est situé sur et préciser la position de G sur chaque médiane.
   3. Montrer que pour tout point du plan, .
2. Soit respectivement le centre du cercle circonscrit au triangle et soit le point du plan défini par

.

* 1. Montrer que est la hauteur issue de dans le triangle .
  2. Que représente le point pour le triangle  ?

1. Montrer que les points et sont alignés.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. a. . Or G et J sont les milieux respectifs de [DA] et [CA] d’où .   On en déduit que les droites (DC) et (GJ) sont parallèles. Comme les points B, G et J sont alignés, (DC) et (BG) sont parallèles.  On démontrerait de même que les droites (BD) et (CG) sont parallèles.  Le quadrilatère BDCG est donc un parallélogramme.   1. Les diagonales du parallélogramme BDCG se coupent en leur milieu.   Le milieu I du segment [BC] est donc aussi le milieu du segment [GD]. En particulier le point I appartient à la droite (GD) qui est aussi la droite (AG), ce qui implique que les points A, G et I sont alignés. |  |

Les trois médianes sont donc bien concourantes en G et

car I est le milieu de [GD] et G est le milieu de [AD]. On en tire la relation , ce qui précise la position du point G sur la médiane [AI]. La position de G sur les autres médianes est analogue (le raisonnement fait ne fait jouer aucun rôle particulier aux deux médianes considérées).

1. Pour tout point M du plan,

Or donc et donc .

1. a. L’égalité s’écrit aussi car I est le milieu de [BC].

On en déduit que (AH) et (OI) sont parallèles. Or (OI) est la médiatrice de [BC] par définition du point O donc (AH) est perpendiculaire à (BC). La droite (AH) est donc la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

b. On démontrerait de même que (BH) et (CH) sont aussi des hauteurs. Le point H est donc l’orthocentre du triangle ABC.

3. De plus comme et pour tout point M, en particulier , on en déduit que .

On peut donc affirmer que les points O, H et G sont alignés.

**Exercice 5 – Alignement et parallélisme en géométrie analytique**

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :

- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;

- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;

- traduisant sur ses coordonnées l’appartenance d’un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle rectangle en C. On pose et . On note I le milieu de [BC] et J le milieu de [AI].

Soit K le point défini par et soit L le symétrique du point I par rapport au point B.

1. Montrer que les points K, J et B sont alignés.
2. Montrer que les droites (AL) et (BK) sont parallèles.

On peut se placer pour cela dans un repère orthonormé dans lequel les coordonnées du point A sont et celles du point B sont .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Dans le repère proposé, les coordonnées des points A, B, C sont respectivement . Le milieu I du segment [BC] est donc le point . Le milieu J de [AI] est le point .   L’égalité s’écrit aussi  soit ce qui donne .  On en tire les vecteurs et . |  |

. On en déduit que les vecteurs et sont colinéaires, ce qui signifie que les points B, J et K sont alignés.

1. Le point L est le symétrique du point I par rapport au point B ce qui signifie que .

Comme I est le milieu de [BC], on en déduit que . Les coordonnées du point L sont donc . On en tire le vecteur .

Alors . On en déduit que les vecteurs et sont colinéaires, ce qui signifie que les droites (AL) et (BK) sont parallèles.

**Exercice 6 – Famille de droites**

En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :

- traduire sur une équation de droite les éléments caractéristiques d’une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d’un point …) ;

- trouver à partir d’une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d’un repère orthonormé . Pour tout réel , on considère l’ensemble des points tels que : .

* 1. Vérifier que pour tout réel , est une droite.
  2. Pour quelle valeur de , la droite est-elle parallèle à l’axe des abscisses ? à l’axe des ordonnées ?
  3. Montrer que toutes les droites passe par un même point I dont on donnera les coordonnées.
  4. Pour quelle valeur de le nombre est le coefficient directeur de la droite ? A-t-on pour tout réel une droite de coefficient directeur  ?
  5. Soit et . Pour quelle valeur de la droite a-t-elle même ordonnée à l’origine que la droite  ?

1. est une droite si et seulement si les coefficients de et dans l’équation ne sont pas tous les deux nuls. Or équivaut à mais alors et équivaut à mais alors .

L’ensemble est donc bien toujours une droite.

1. La droite est parallèle à l’axe des abscisses si et seulement si le coefficient de dans l’équation est nul soit c’est-à-dire . Une équation de est ou

La droite est parallèle à l’axe des ordonnées si et seulement si le coefficient de dans l’équation est nul soit . Une équation de est ou .

1. Si le point existe, il appartient aux droites et . Il suffit alors de vérifier que, pour tout réel le couple est solution de .

Or, pour tout réel , .

Toutes les droites passent donc bien par le point .

1. Si , l’équation s’écrit et le coefficient directeur de la droite est .

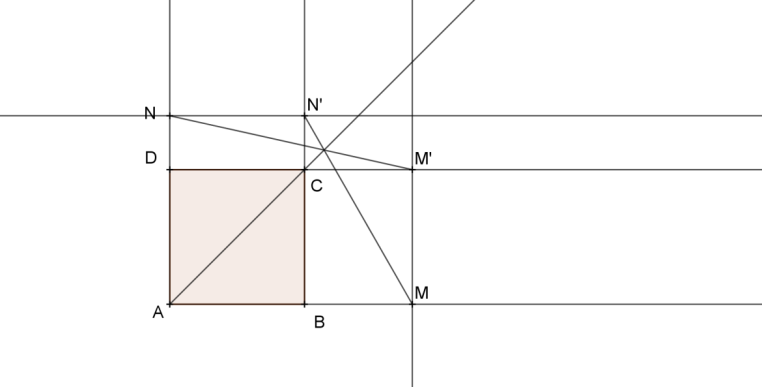
équivaut à soit soit .

Soit un réel, équivaut, pour , à c’est-à-dire . Au réel on pourra associer une droite si et seulement si .

1. Un point du plan appartient à si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires c’est-à-dire leur déterminant est nul ce qui s’écrit soit .

Cette équation s’écrit aussi . L’ordonnée à l’origine de la droite est donc 1.

La droite a donc même ordonnée à l’origine que la droite  si et seulement si soit

**Exercice 7 – Droites concourantes**

Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes. Lorsque trois droites ont un point commun, on dit qu’elles sont *concourantes* (ce terme a été utilisé dans un exercice précédent).

On considère un carré ABCD de côté 1, et le repère ). Les points M et N ont pour couples de coordonnées et respectivement avec et différents de 0 et de 1. Les points M’ et N’ sont les points de couples de coordonnées et respectivement.

**1.** À quelle condition (sur et ) les droites (MN’) et (NM’) sont-elles parallèles ?

**2.** Montrer que, sicette condition n’est pas réalisée, les droites (MN’), (NM’) et (AC) sont concourantes.

**1.** Le point M’ a pour coordonnées et le point N a pour coordonnées . La pente de la droite (M’N) est donc . Les coordonnées de M sont et celles de N’ sont . La pente de la droite (MN’) est donc . Ces pentes sont identiques si c’est-à-dire .

**2.**  Si cette condition n’est pas réalisée, on peut chercher les coordonnées du point d’intersection de ces deux droites, dont des équations sont : et . Le système a une solution qui vérifie (par « addition » membre à membre). Le point correspondant appartient donc à la droite (AC). Les trois droites sont concourantes.