** Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2024-2025 Stage « filé »**

**Classe de première Fiche numéro 3**

**Parution lundi 27 janvier Retour attendu pour le mardi 4 mars**

**Exercice 1 Inégalités et calcul littéral**

Définition : on dit qu’un nombre est inférieur ou égal à un nombre lorsque .

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriétés :

1. Pour tous réels et strictement positifs, si , alors .
2. Pour tout réels et positifs, si et alors .
3. **a.** Démontrer que, pour tous réels strictement positifs, . .
   1. Soit des réels strictement positifs, développer et réduire le produit .
   2. En déduire que si  des réels strictement positifs tels que , alors .
4. Soit trois nombres réels de l’intervalle .
   1. Montrer que .
   2. En déduire que .
5. **a.** . Comme et sont strictement positifs, . De plus . On a donc bien .

.

* 1. Le résultat du a. permet d’écrire , et d’où .

On en déduit que (puisque ).

Or, d’après la propriété (1), comme , d’où .

1. **a.** Comme et , d’après la propriété (2), soit . On montre de même que et . Comme le produit d’un nombre impair de nombres négatifs est négatif, on a bien .

**b.**

D’autre part,

Soit .

Donc .

D’après le **a.** on peut donc en déduire que

c’est-à-dire.

**Exercice 2 – Racines et coefficients d’un trinôme**

Propriété : Soit et deux nombres réels tels que et . Alors et sont les solutions de l’équation .

Deux amis discutent sur les travaux entrepris dans le séjour rectangulaire de l’appartement de 60 m2 de l’un d’entre eux :

* Tiens, tu as posé du papier peint au plafond et une corniche tout autour de ce plafond. Cela t’a-t-il coûté cher ?
* Ah, secret ! Je te dirai seulement que le prix au mètre de la corniche était deux fois plus élevé que le prix au mètre carré du papier peint mais que j’ai payé exactement la même somme pour les deux matériaux.

Après un instant de réflexion, l’ami remarque :

* Tu ferais mieux d’examiner de près ta facture.

Expliquer pourquoi.

Soit et les dimensions au sol du séjour. L’aire de la pièce est donc et son périmètre est .

Comme le prix au mètre de la corniche est deux fois plus élevé que le prix au mètre carré du papier peint,

. Les nombres et sont donc les solutions du système c’est-à-dire les solutions de l’équation du second degré . Or le discriminant de cette équation est .

On sait que l’équation a des solutions donc soit c’est-à-dire .

Or une superficie de séjour de plus de 64 m2 est assez rare dans un appartement.

**Exercice 3 – Recherche de nombres premiers dans certaines suites**

Définition : un entier naturel est un nombre premier lorsqu’il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.

Pour factoriser un polynôme du second degré , où , on peut :

* chercher ses racines et, si elles existent, écrire dans le cas de deux racines distinctes et ou dans le cas d’une racine double  ;
* faire apparaitre une identité remarquable comme ou .

**a.** En 1772, Leonhard Euler annonce que le polynôme prend pour valeur un nombre premier pour tout nombre entier inférieur 40. Le vérifier.

**b.** Pour quels nombres entiers naturels le nombre est-il un nombre premier ?

**c.**Pour quels nombres entiers naturels le nombre est-il un nombre premier ?

1. On calcule pour tout entier à 40, ce qui donne le tableau :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|  | 41 | 43 | 47 | 53 | 61 | 71 | 83 | 97 | 113 | 131 | 151 | 173 |
|  | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|  | 197 | 223 | 251 | 281 | 313 | 347 | 383 | 421 | 642 | 503 | 547 | 593 |
|  | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
|  | 641 | 691 | 743 | 791 | 853 | 911 | 971 | 1 033 | 1 097 | 1 163 | 1 231 | 1 301 |
|  | 36 | 37 | 38 | 39 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 1 373 | 1 447 | 1 523 | 1 601 |  |  |  |  |  |  |  |  |

En cherchant, pour chaque valeur de les diviseurs premiers successifs éventuels de jusqu’à , on constate que tous les nombres sont bien des nombres premiers.

1. Le discriminant de l’équation vaut et les solutions de cette équation sont et .

On peut donc écrire que pour tout entier naturel ,

et sont distincts donc :

Pour que soit donc un nombre premier il faut que ou . Les seules valeurs possibles puisque est un entier naturel sont et et ces valeurs sont bien solutions.

1. Pour tout entier naturel ,

Soit

Pour , n’est pas premier

Pour strictement positif, et sont distincts donc

est donc un nombre premier il faut que ou .

Il n’y a plus qu’à résoudre les 4 équations du second degré et constater que les seules solutions entières positives sont et

**Exercice 4 – Tangentes et paraboles**

Propriété 1 : Soit une fonction définie sur un intervalle I et sa courbe représentative dans le plan muni d’un repère. Soit un réel de l’intervalle I et A le point de d’abscisse . Si est dérivable en , alors admet au point A une tangente d’équation .

Propriété 2 : Les points d’intersections des courbes représentatives et de deux fonctions et sont les points de ces courbes dont les abscisses sont solutions de .

Soit la fonction définie sur par et sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1. **a.** Soit un nombre réel. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d’abscisse .

**b.** Déterminer, si elles existent, les tangentes à passant par l’origine du repère.

1. Soit la fonction définie sur par et sa courbe représentative dans le repère orthonormé .
   1. Déterminer les points d’intersections éventuels des deux paraboles et .
   2. Déterminer une équation de la tangente à au point .
   3. En déduire s’il existe une tangente commune à ces deux paraboles.
2. On dit que deux courbes sont orthogonales lorsqu’elles admettent au moins un point commun et, qu’en ce(s) point(s), elles ont des tangentes perpendiculaires.

Soit la fonction définie sur par et sa courbe représentative dans le repère orthonormé . Montrer que les courbes et sont orthogonales.

1. **a.** La fonction trinôme est dérivable sur et, pour tout réel , .

Une équation de la tangente à au point d’abscisse est donc

Soit soit

C’est-à-dire .

**b.** La tangente passe par l’origine si et seulement si le couple est solution de l’équation

soit c’est-à-dire ou .

Il existe donc deux tangentes à la parabole passant par l’origine : la tangente d’équation et la tangente d’équation .

1. **a.** Les points communs, s’ils existent, aux deux paraboles et sont les points de ces courbes dont les abscisses sont les solutions de l’équation soit c’est-à-dire

soit . Les solutions de cette équation sont 1 et 3.

Les deux paraboles ont dont deux points communs : les points de coordonnées et .

**b.** La fonction est dérivable sur et, pour tout réel , .

Une équation de la tangente à au point d’abscisse est donc

Soit soit, après simplification, .

1. Soit et deux nombres réels et soit la droite d’équation . Les deux paraboles ont la droite comme tangente commune si et seulement s’il existe deux réels et b tels que :

. Le système équivaut à .

Il implique donc l’équation soit soit .

Le discriminant de cette équation est strictement négatif. Il n’existe donc pas de tangente commune aux deux courbes.

1. Les points communs, s’ils existent, aux deux paraboles et sont les points de ces courbes dont les abscisses sont les solutions de l’équation soit

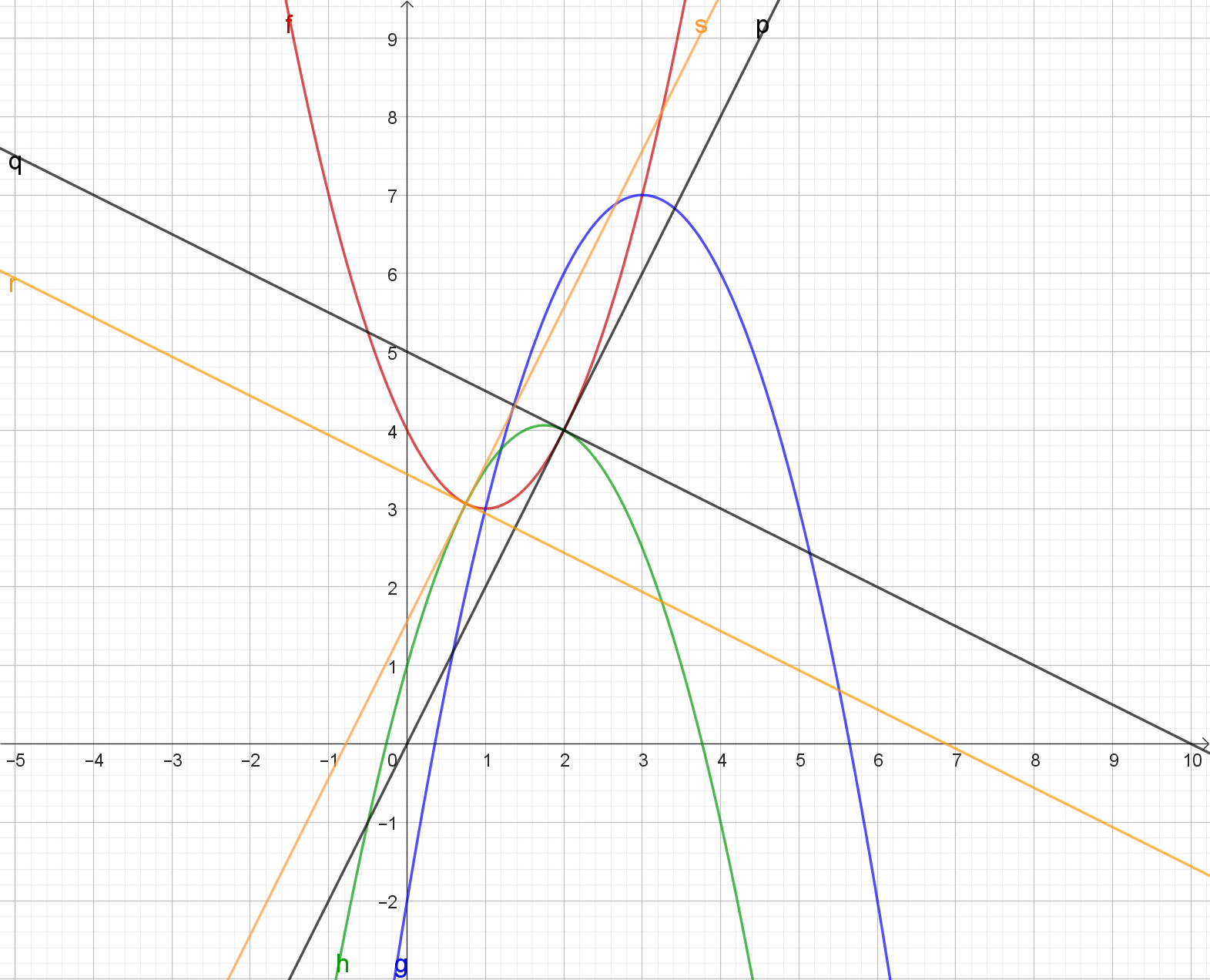
c’est-à-dire soit . Les solutions de cette équation sont et 2. Les paraboles et ont donc deux points communs, les points de coordonnées et

La fonction est dérivable sur et, pour tout réel , .

et sont les coefficients directeurs des tangentes à et au point d’abscisse et donc les deux tangentes sont perpendiculaires.

et sont les coefficients directeurs des tangentes à et au point d’abscisse et donc les deux tangentes sont perpendiculaires.

On en conclut que les paraboles et sont orthogonales.



**Exercice 5 – Nombres pentagonaux**

Définition : on dit qu’une suite est arithmétique lorsqu’il existe un nombre réel tel que, pour tout entier naturel , .

Méthode : démontrer qu’une suite est arithmétique revient donc à démontrer que la différence entre deux termes consécutifs de la suite ne dépend pas de .

Propriétés :

1. Soit une suite arithmétique de raison . Alors .
2. Soit une suite arithmétique. Alors .

|  |  |
| --- | --- |
| Partant d’un point (étape 1), on construit successivement des pentagones réguliers en ajoutant un point sur la ligne du bas comme sur la figure ci-contre.  On note le nombre de points (rouges ou bleus) obtenus à l’étape .   1. Donner les valeurs de . 2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul , . |  |

1. Déterminer la nature de la suite de terme général .
2. En exprimant, pour la somme de deux manières différentes, en déduire une expression explicite de en fonction de .
3. Quel le *nombre pentagonal* ?
4. On vérifie sur les schémas que .
5. Pour tout entier naturel non nul , pour passer de l’étape à l’étape , on ajoute trois côtés de pentagone contenant chacun points mais avec deux points sommets communs.

Donc

1. Pour tout entier naturel non nul ,

Soit . La suite est donc une suite arithmétique de raison 3.

On sait d’ailleurs que, pour tout entier naturel non nul , .

1. On peut écrire

Les termes de cette somme dite télescopique s’annulent deux à deux sauf deux termes et .

D’autre part, est la somme des n-1 premiers termes consécutifs de la suite arithmétique donc

.

*Remarque : attention, ici la somme comprend termes et non .*

Des deux expressions de , on déduit que .

*Remarque : on peut alors vérifier le résultat obtenu sur les valeurs 1, 2, 3 et 4 calculées à la question 1.*

1. .

**Exercice 6 – Produit scalaire et orthogonalité**

Définition 1 : Soit et deux vecteurs de représentants respectifs et ( et .

On note le réel si les points et sont distincts du point et sinon.

(On admet que ne dépend pas des représentants et choisis pour et .

On appelle produit scalaire de et le nombre .

Définition 2 : On dit que deux vecteurs et de représentants respectifs et sont orthogonaux lorsque soit l’un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l’orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour et ).

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

si les points et sont distincts du point ;

où est le projeté orthogonal de sur .

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

* au théorème 1 : «  et sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si  » ;
* à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
* aux propriétés opératoires du produit scalaire.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit un triangle.   A l’extérieur de ce triangle on construit deux carrés comme sur la figure ci-contre.   1. Montrer que . 2. En déduire que les vecteurs et sont orthogonaux. 3. Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (EB) ? |  |
| 1. Soit ABCD un trapèze isocèle dont les côtés non parallèles sont perpendiculaires en un point O, comme sur la figure ci-contre et soit I le milieu de [AC]. 2. Exprimer en fonction de et 3. En déduire que . 4. Démontrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires. |  |

1. **a.** et .

Or et puisqu’on a des carrés et

donc . On en déduit que .

**b.**

Soit (puisqu’on a des carrés donc des angles droits).

D’après le a ., on en déduit que .

1. . Les droites (AD) et (EB) sont donc perpendiculaires.
2. **a.** I étant le milieu de [AC], on a .

**b.**

Or (OA) et (OD) sont perpendiculaires donc et .

On a donc

1. Soit car le trapèze étant isocèle, la médiatrice de [BC] est un axe de symétrie d’où et .

Comme , les vecteurs et sont orthogonaux d’où les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.

**Exercice 7 – Puissance d’un point par rapport à un cercle**

Soit un cercle de centre et de rayon . On appelle *puissance du point par rapport au cercle* le nombre

1. Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite coupe le cercle en deux points et , alors .

(on pourra introduire le point diamétralement opposé au point sur le cercle ).

1. Montrer que si une droite passant par est tangente au cercle en alors .
2. Etudier le signe de suivant la position du point par rapport au cercle .
3. Soit un cercle de centre et de rayon . On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l’ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport aux cercles et. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit le point diamétralement opposé à sur le cercle   Le triangle est alors rectangle en  donc  Or  Soit  D’où .   1. Si est le point où la droite est tangente, alors |  |

Soit car, par définition du point , .

On a donc bien .

1. Comme le signe de est déterminé par la distance de à :

* Si c’est-à-dire est à l’intérieur du cercle , alors ;
* Si c’est-à-dire appartient au cercle , alors ;
* Si c’est-à-dire est à l’extérieur du cercle , alors .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit la puissance d’un point M par rapport au cercle . Alors et équivaut à   soit .  Or  Soit si on note le milieu de .  Soit le projeté orthogonal de sur la droite , on a donc  .  Un point M a donc même puissance par rapport aux cercles et si et seulement si son projeté orthogonal H sur la droite vérifie |  |

En particulier, si les deux cercles ont même rayon, l’ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles et est la médiatrice du segment .