** Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2021-2022 Stage « filé »**

**Classe de première Fiche numéro 3**

**Parution lundi 24 janvier Retour attendu pour le mercredi 9 février**

**Exercice 1 Inégalités**

Rappels sur les inégalités :

1. Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
2. Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.
   1. Montrer que pour tout réel strictement positif, .
   2. Soit et trois nombres réels strictement positifs. Démontrer l’inégalité

.

1. Pour tout réel , soit soit pour tout strictement positif, .
2. Considérons le nombre

Soit

Soit

On retrouve dans chaque parenthèse une expression , où est un réel strictement positif. Or .

On en tire soit d’où .

Comme et , on a bien .

Définition 1 : Soit et deux vecteurs de représentants respectifs et ( et .

On note le réel si les points et sont distincts du point et sinon.

(On admet que ne dépend pas des représentants et choisis pour et

On appelle produit scalaire de et le nombre .

Définition 2 : On dit que deux vecteurs et de représentants respectifs et sont orthogonaux lorsque soit l’un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l’orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour et )

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

si les points et sont distincts du point ;

où est le projeté orthogonal de sur .

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

* au théorème 1 : «  et sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si  » ;
* à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
* aux propriétés opératoires du produit scalaire.

**Exercice 2 Produit scalaire et orthogonalité**

1. Démonstration du théorème 1 :
2. Soit et sont deux vecteurs orthogonaux, montrer que  (on distinguera le cas où l’un au moins des vecteurs est nul).
3. Soit et deux vecteurs tels que .

Si et sont tous les deux non nuls, montrer qu’ils sont orthogonaux.

Que se passe-t-il si ou est le vecteur nul ?

1. Application 1 : soit un carré. On place deux points et respectivement sur les segments et tels que

Montrer que la médiane issue de dans le triangle est une hauteur du triangle .

1. Application 2 : soit un cercle de centre et de rayon , et deux points de tels que [AB] n’est pas un diamètre de et le point diamétralement opposé à sur .

Montrer que . Qu’en déduit-on pour le triangle  ?

1. a. Soit et sont deux vecteurs orthogonaux. Par définition ou caractérisation du produit scalaire (projection orthogonale ou formule avec le cosinus) :

- si ou est le vecteur nul, alors on a bien

- si et sont tous les deux non nuls, alors donc

b. Soit et sont deux vecteurs tels que .

Si et sont tous les deux non nuls, alors s’écrit d’où, puisque et , ce qui signifie que et sont orthogonaux.

Si ou est le vecteur nul, alors et sont aussi orthogonaux.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. On appelle I le milieu de Résoudre le problème revient à montrer que les vecteurs et sont orthogonaux.   Or, puisque est le milieu de , et on peut écrire :    Soit .  est un carré et les points et appartiennent respectivement aux segments et donc .  D’autre part |  |

Et .

On en déduit ce qui prouve que les vecteurs et sont orthogonaux.

|  |  |
| --- | --- |
| Soit .  Comme est le milieu de ,  D’autre part,  Donc .  On en déduit que le triangle est rectangle en .  *Remarque :* on vient ainsi de montrer que tout triangle dont un côté est diamètre de son cercle circonscrit est un triangle rectangle d’hypoténuse . |  |

**Exercice 3 Puissance d’un point par rapport à un cercle**

Soit un cercle de centre et de rayon . On appelle *puissance du point M par rapport au cercle* le nombre

1. Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite coupe le cercle en deux points et , alors .

(on pourra introduire le point diamétralement opposé au point sur le cercle et se servir du résultat de la question 3 de l’exercice 2).

1. Montrer que si une droite passant par est tangente au cercle en alors .
2. Etudier le signe de suivant la position du point M par rapport au cercle .
3. Soit un cercle de centre et de rayon . On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l’ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport aux cercles et. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit le point diamétralement opposé à sur le cercle   D’après l’exercice 2, le triangle est rectangle en  donc  Or  Soit  D’où .   1. Si est le point où la droite est tangente, alors |  |

Soit car, par définition du point , .

On a donc bien .

1. Comme le signe de est déterminé par la distance de à :

* Si c’est-à-dire est à l’intérieur du cercle , alors ;
* Si c’est-à-dire appartient au cercle , alors ;
* Si c’est-à-dire est à l’extérieur du cercle , alors .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit la puissance d’un point M par rapport au cercle . Alors et équivaut à   soit .  Or  Soit si on note le milieu de .  Soit le projeté orthogonal de sur la droite , on a donc  .  Un point M a donc même puissance par rapport aux cercles et si et seulement si son projeté orthogonal H sur la droite vérifie |  |

En particulier, si les deux cercles ont même rayon, l’ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles et est la médiatrice du segment .

**Exercice 4 Centre du cercle inscrit**

Définition : On appelle cercle inscrit dans un polygone un cercle tangent à chacun des côtés du polygone.

Propriétés :

* Les bissectrices intérieures d’un triangle sont concourantes.
* Le point de concours des bissectrices d’un triangle est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Montrer qu’un vecteur est nul revient à montrer que sa norme vaut zéro.

Pour tout vecteur , et pour tout vecteur , est un vecteur de norme 1.

Soit ABC un triangle et son cercle inscrit. On note I le centre du cercle et on note les longueurs respectives des segments [BC], [CA], [AB].

Le cercle est tangent aux segments [BC], [CA], [AB] respectivement en M, N, P.

On veut montrer que

1. On pose et .

Exprimer en fonction des vecteurs , et et du rayon du cercle .

1. En déduire que .

|  |  |
| --- | --- |
| Si  et .  Alors , d’où    Comme les vecteurs et sont unitaires de par leur définition, .  On en déduit, en développent le carré scalaire ci-dessus et en utilisant les propriétés opératoires du produit scalaire que : |  |

Soit .

Or, dans le quadrilatère IMCN, la somme des mesures des angles aux sommets vaut 360° et les angles en M et en N sont droits donc d’où . De même pour les deux autres cosinus.

D’où .

Or, dans le triangle ABC, on a les trois égalités (Formule d’Al Kashi) :

En ajoutant membre à membre ces égalités, on obtient :

Soit

On en déduit que soit .

**Exercice 5 Recherche de nombres premiers dans certaines suites**

Définition : un entier naturel est un nombre premier lorsqu’il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.

Pour factoriser un polynôme du second degré , où , on peut :

* chercher ses racines et, si elles existent, écrire dans le cas de deux racines distinctes et ou dans le cas d’une racine double  ;
* faire apparaitre une identité remarquable comme ou .

a. En 1772, Leonhard Euler annonce que le polynôme prend pour valeur un nombre premier pour tout inférieur ou égal 40. Le vérifier.

b. Pour quels nombres entiers naturels le nombre est-il un nombre premier ?

c.Pour quels nombres entiers naturels le nombre est-il un nombre premier ?

1. On calcule pour tout entier premier inférieur à 40, c’est-à-dire appartenant à ce qui donne le tableau :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 |
|  | 47 | 53 | 71 | 97 | 173 | 223 | 347 | 421 | 593 | 911 | 1033 | 1447 |

En cherchant, pour chaque valeur de les diviseurs premiers successifs éventuels de jusqu’à , on constate que tous les nombres de la deuxième ligne sont bien des nombres premiers.

1. Le discriminant de l’équation vaut et les solutions de cette équation sont et .

On peut donc écrire que pour tout entier naturel ,

et sont distincts donc :

est donc un nombre premier si et seulement si ou . Les seules solutions puisque est un entier naturel sont et

1. Pour tout entier naturel ,

Soit

Pour , n’est pas premier

Pour strictement positif, et sont distincts donc

est donc un nombre premier si et seulement si ou .

Il n’y a plus qu’à résoudre les 4 équations du second degré et constater que les seules solutions entières positives sont et

**Exercice 6 Droites et paraboles**

Lorsque le plan est muni d’un repère, chercher les points d’intersection entre deux ensembles définis chacun par une équation revient souvent à chercher les réels vérifiant les deux équations.

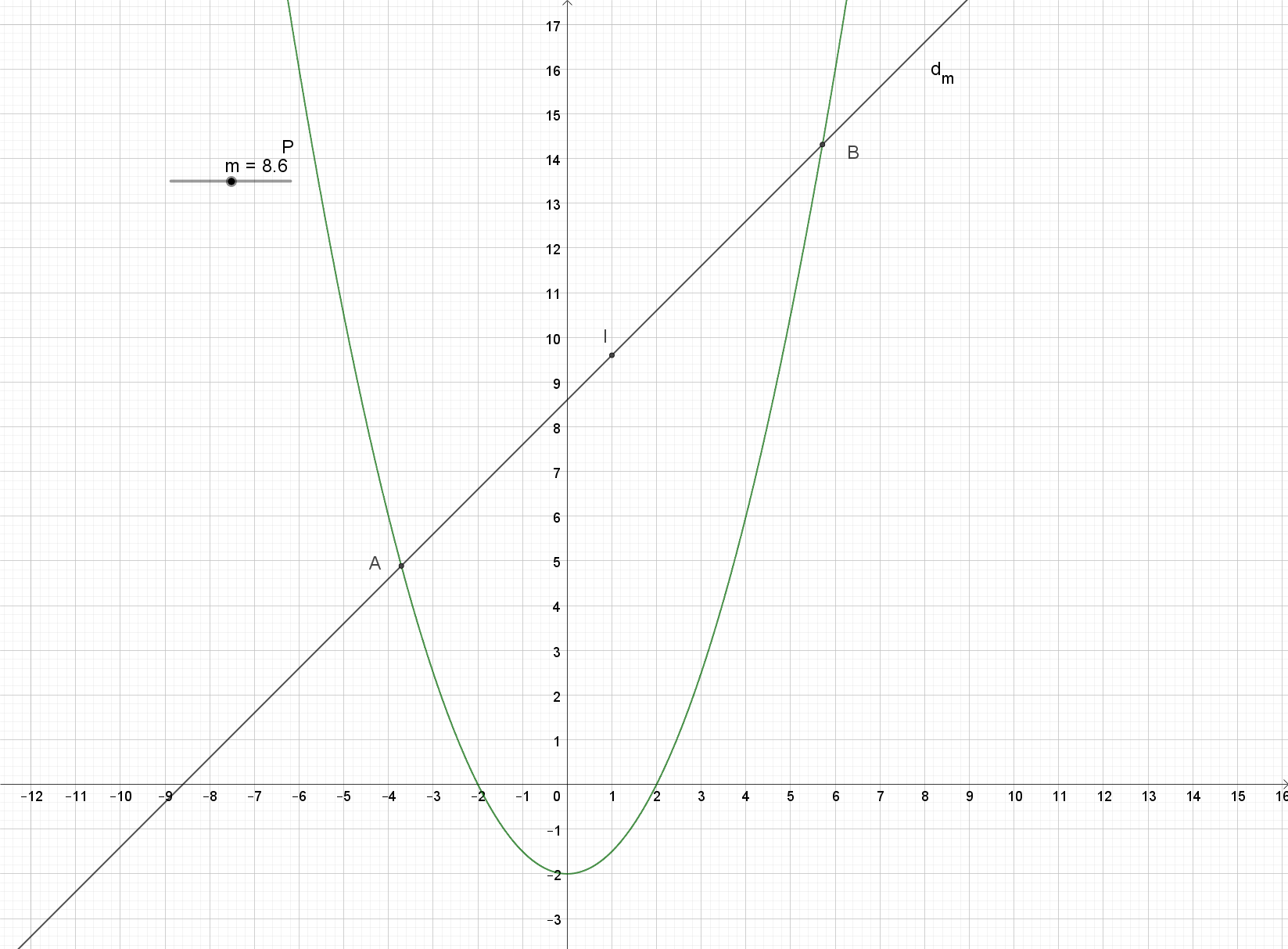
Pour toute droite de pente , il existe un réel tel que l’équation réduite de soit . La valeur de est déterminée en remplaçant et par les coordonnées d’un point connu de la droite

Pour déterminer que deux ensembles sont égaux et , on peut montrer que si un objet est dans alors il est dans et que, réciproquement, si un objet est dans alors il est dans .

Dans le plan muni d’un repère orthonormal, on considère :

* la représentation graphique de la fonction définie sur **R** par ;
* pour tout réel , la droite d’équation .

1. Construire la courbe .
2. Déterminer, suivant la valeur de , le nombre de points d’intersection de et .
3. Lorsque et ont deux points d’intersection A et B, déterminer le lieu géométrique du milieu I du segment [AB], c’est-à-dire l’ensemble de tous les points I quand m prend toutes les valeurs donnant au moins un point d’intersection entre et .
4. Lorsque et ont un seul point d’intersection, que représente la droite pour la fonction  ?



1. Un point est point d’intersection de et si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations et .

On se ramène donc à résoudre l’équation qui équivaut à .

Le discriminant de cette équation est . On en déduit que :

* Si , alors et n’ont aucun point d’intersection.
* Si , alors et ont un unique point d’intersection C, dont l’abscisse est 1.
* Si , alors et ont deux points d’intersection.

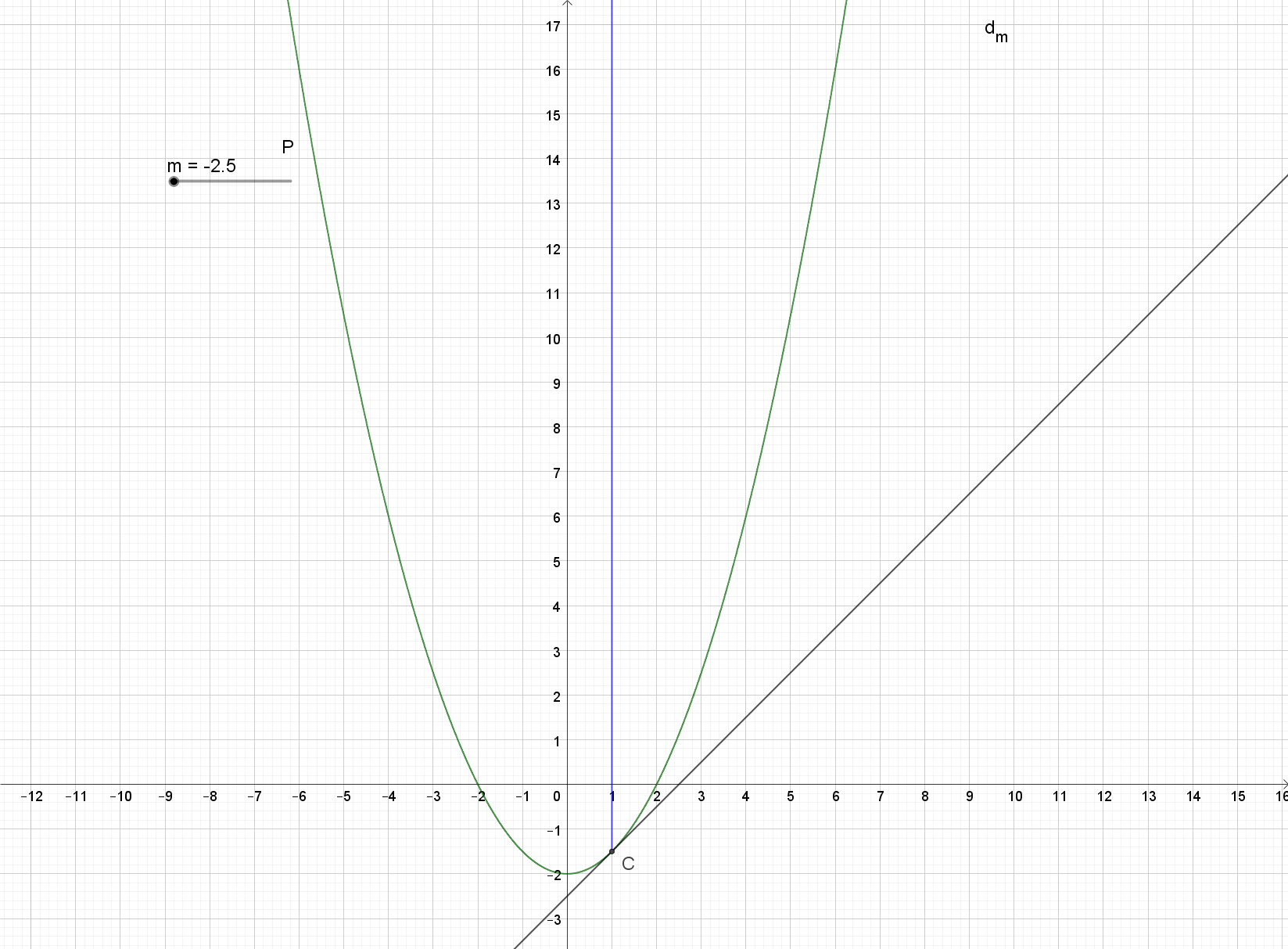
1. Si et ont deux points d’intersection notés A et B, le milieu I de [AB] a pour abscisse la demi somme des solutions de l’équation soit . Dans le cas où et ont un seul point d’intersection, les points A, B et I sont confondus.

Le point I a donc une abscisse constante égale à 1. Il appartient donc à la droite d’équation . De plus, comme I est un point de la droite son ordonnée vaut où soit , le point I appartient donc à une demi-droite d’extrémité C incluse dans la droite d’équation où C est le point de de coordonnées .

Réciproquement, si I est un point de la demi-droite alors le point I a pour coordonnées où . Il existe donc un réel tel que la droite de pente 1 passant par I ait pour équation . Comme I appartient à cette demi-droite, doit et la droite a pour équation . D’après la question b, comme , et ont un ou deux points d’intersection définissant un segment dont I est le milieu.

On peut donc dire que le lieu géométrique du point I est la demi-droite d’extrémité C incluse dans la droite d’équation .

Remarque : on dit que lorsque *décrit* , le point I *décrit* la demi-droite .



1. Lorsque et ont un unique point commun, la droite est la droite de coefficient directeur 1 au point C, qui est le point de d’abscisse 1. Or puisque . Donc est la tangente en C à .

**Exercice 7 Orthocentre et hyperbole**

Dans le plan muni d’un repère orthonormal, si et sont trois points du plan tels que :

* un point appartient à la droite si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires ;
* un point appartient à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite si et seulement si les vecteurs et sont orthogonaux.

C’est en traduisant sur les coordonnées (déterminant ou produit scalaire nul) qu’on obtient une équation de chacune de ces droites.

Dans le plan muni d’un repère orthonormal, on considère l’hyperbole d’équation et trois points deux à deux distincts et d’abscisses respectives , et (non nulles) de cette hyperbole.

1. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue du point dans le triangle .
2. En déduire une équation de la hauteur issue du point dans le triangle .
3. Montrer que l’orthocentre du triangle appartient à l’hyperbole .
4. Les points et d’abscisses respectives , et sont des points de l’hyperbole d’équation . On a donc .

Un point appartient à la hauteur issue du point dans le triangle si et seulement si les vecteurs et sont orthogonaux soit c’est-à-dire

soit, puisque les points sont distincts et donc ,

. L’équation réduite de est donc .

1. En permutant les rôles de et , devint , devient et c devient et l’équation réduite de la hauteur issue du point dans le triangle est .
2. Les coordonnées de l’orthocentre du triangle sont les solutions du système qui équivaut au système .

La première équation s’écrit soit, puisque sont distincts et donc , .

L’ordonnée du point est alors .

On constate que l’ordonnée de est l’inverse de son abscisse, ce qui signifie que est bien un point de l’hyperbole *.*

**Exercice 8 Racine double d’un polynôme et dérivation**

Soit un polynôme . Un nombre réel est racine double de lorsqu’il existe un polynôme tel que,

pour tout réel , et

On a vu dans la fiche 2 que pour tous réels et et pour tout entier naturel ,

.

Si et sont des polynômes de degré et , alors le polynôme défini par, pour tout réel , est de degré .

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.

1. Montrer que pour tout réel et pour tout polynôme , il existe un polynôme tel que

.

1. Montrer qu’alors .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu’un réel soit une racine double du polynôme .
3. Montrer que le polynôme défini par admet 1 comme racine double et résoudre l’équation puis factoriser
4. Supposons que est polynôme de degré . Il existe alors réels tels que et .

Alors, pour tout réel ,

­

­

Or, pour tous réels et et pour tout entier naturel ,

donc est factorisable par .

Il existe donc bien un polynôme tel que soit .

1. On a pour tout réel , d’où, en particulier, .
2. Comme, pour tous réels et , , est racine de si et seulement si et alors et est racine double de si et seulement si est racine de et aussi racine de soit .

Comme, pour tous réels et , , est racine de si et seulement si et alors

De la même manière est racine de si et seulement s’il existe un polynôme tel que

Et alors pour tout réel, ,

soit en dérivant une première fois : ,

et une deuxième fois :

on obtient alors

est racine double de si et seulement si est racine de et aussi racine de mais pas de

soit et

Cette condition nécessaire et suffisante s’écrit et

1. Si alors et . On constate que

, et donc .

D’après la question c, 1 est bien racine double de .

Il existe donc un polynôme de degré 2 (puisque P est de degré 4 et est de degré 2) tel que, pour tout réel , et il existe donc des réels tels que et

soit .

Pour tout réel ,

Ces deux polynômes ont donc mêmes coefficients et on se ramène à résoudre le système :

qui équivaut au système .

On a donc . Il ne reste plus qu’à résoudre l’équation

. Son discriminant vaut 1 et ses solutions sont 2 et 3.

L’équation a donc une racine double 1 et deux racines simples 2 et 3. De plus, pour tout réel ,

.