***Incise : résolution de l’équation du troisième degré***

***(Bombelli, Cardan, Del Ferro, Tartaglia, etc.)***

1. L’équation $ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$ peut être ramenée, par mise en facteur et changement de variable, à l’équation type du troisième degré

$$x^{3}+px+q=0$$

2. En posant $x=u+v$ et en exigeant $uv=-\frac{p}{3}$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{c}u^{3}+v^{3}=-q\\u^{3}v^{3}=-\frac{p^{3}}{27}\end{array}\right.$$

3. Ce système se résout en résolvant l’équation auxiliaire, du second degré :

$$X²+qX-\frac{p^{3}}{27}=0$$

dont les solutions sont les cubes de deux nombres à additionner pour obtenir une (une…) solution de l’équation initiale.



4. Si le discriminant $q²+\frac{4p^{3}}{27}$ est positif, on fait comme on a dit et on trouve LA racine de l’équation

(Formule de Cardan :

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q²+\frac{4p^{3}}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q²+\frac{4p^{3}}{27}}}{2}} ).$$

Dans le cas où l’équation possède trois racines, on ne les trouve pas ainsi. C’est trop bête !

5. Pourtant, dans le cas de l’équation $x^{3}-15x-4=0$, on a $p=-15$ et $q=-4$ et $q²+4\frac{p^{3}}{27}=-484$. Bombelli écrit ce qu’on écrira plus tard

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ .

Aujourd’hui, on sait que $\left(2+i\right)^{3}=8+12i-6-i=2+11i$…