|  |  |
| --- | --- |
|  | **François Viète (1540 – 1603)**  **Naissance de l’algèbre moderneUne image contenant portrait, croquis, Visage humain, Barbe humaine  Description générée automatiquement**  Juriste de formation, il est avocat puis conseiller au Parlement de Paris avant de devenir conseiller des rois Henri III et Henri IV.  **Une image contenant texte, livre, arbre, illustration  Description générée automatiquement**Il est réputé pour avoir, au service du roi, décrypté des messages codés des armées ennemies (espagnoles). Il crée un code pour Sully.  Il étudie l’astronomie, cherche à résoudre les problèmes classiques de géométrie, et publie en 1591 le petit livre « *In artem analyticem Isagoge »*. Il y introduit des notations modernes (pour les signes opératoires, pour la désignation des inconnues et des *coefficients*) et décrit les phases logiques d’une démonstration. Il termine par la résolution « ***Nullum non problema solvere*** », trois siècles avant le « ***Wir müssen wissen, wir werden wissen*** » de Hilbert. |
| **Lycée Marie Curie**  **VERSAILLES**  **Collège**  **François Furet ANTONY** |

***Stage ouvert aux collégiennes et collégiens***

***des classes de troisième – 21 et 22 octobre 2024***

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent ou ont hébergé nos stages : l’INRIA, l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet à Antony, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspectrices et inspecteurs :** Luca AGOSTINO,Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Marion PACAUD, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

**Les intervenants professeurs :** Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Rémi NIGUES (collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d’Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES)

**Professeurs accompagnants :**

***Emploi du temps***

***Lundi 21 octobre 2023***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Antony*** | | ***Versailles*** | | | | | |
|  | | ***Groupe 1*** | | ***Groupe 2*** | | ***Groupe 3*** | |
| **10.00** | **Accueil** | **10.00** | **Accueil** | | | | |
| **10.10** | **NOMBRES**  **NR** | **10.10** | **NOMBRES**  **CD** | | **AIRES ET VOLUMES PM** | | **GEOMETRIE PLANE**  **RN** |
| **12.10** | **Repas** | **12.10** | **Repas** | | | | |
| **13.00** | **AIRES ET VOLUMES NR** | **13.00**  **15.00** | **GEOMETRIE PLANE**  **RN** | | **NOMBRES**  **CD** | | **AIRES ET VOLUMES**  **PM** |
| **15.10** | **FILMS** | **15.10** | **Exposé : « le nombre  »**  **+ Films** | | | | |

***Mardi 22 octobre 2024***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Antony*** | | ***Versailles*** | | | | | |
|  | | ***Groupe 1*** | | ***Groupe 2*** | | ***Groupe 3*** | |
| **10.00** | **Accueil** | **10.00** | **Accueil** | | | | |
| **10.10** | **GEOMETRIE PLANE CS** | **10.10** | **AIRES ET VOLUMES**  **PM** | | **DENOMBREMENT**  **CD** | | **DENOMBREMENT**  **SM** |
| **12.10** | **Repas** | **12.10** | **Repas** | | | | |
| **12.45** | **DENOMBREMENT**  **XG** | **13.00**  **15.00** | **DENOMBREMENT**  **SM** | | **GEOMETRIE**  **PLANE RN** | | **NOMBRES**  **CD** |
| **14.30** | **QIUIZ**  **Exposé : « le nombre  »** | **15.10** | **Quiz** | | | | |

**AIRES ET VOLUMES**

**Exercice 1**

|  |  |
| --- | --- |
| On construit un *shuriken* à l’aide d’arcs de cercles (voir la figure ci-contre). Il possède six axes de symétrie et les arcs de cercles sont deux à deux tangents à leur point commun (à chaque « pointe » de la figure).  On suppose que la largeur du shuriken (distances entre deux « pointes » opposées) est égale à 10.  Déterminer l’aire du shuriken. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| On prolonge chaque arc de cercle par le cercle qui le contient pour former six cercles et un hexagone. On constate alors que l’aire cherchée est obtenue en retranchant l’aire de deux disques (6 fois un tiers de disque) à l’aire de l’hexagone tracé en pointillés sur la figure ci-contre et constitué de 6 triangles équilatéraux identiques et dont la hauteur est 5 (moitié de la largeur du shuriken).  Si on note la longueur des côtés de ces triangles équilatéraux, le théorème de Pythagore permet d’écrire  soit soit soit .  L’aire de l’hexagone est donc  Le rayon de chaque cercle est donc l’aire d’un disque est |  |

et l’aire cherchée est

**Exercice 2**

|  |  |
| --- | --- |
| Deux cercles de rayons 9 et 17 sont contenus dans un rectangle dont un des côtés a pour longueur 50. Les deux cercles sont tangents l’un à l’autre et à deux côtés adjacents du rectangle comme dans la figure ci-contre.  Déterminer l’aire du rectangle. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| On projette orthogonalement les centres E et F des cercles sur les côtés du rectangle. On obtient les deux carrés EKBJ et FHDG. On note I le point d’intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par E et de la perpendiculaire à (DC) passant par F. On obtient le rectangle HIJC. On en déduit que :    De plus, les deux cercles étant tangents en L,    En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle IEF rectangle en I, d’où . |  |

On en déduit que et que l’aire du rectangle est égale à .

**Exercice 3**

|  |  |
| --- | --- |
| Un réservoir est un prisme droit à base rectangulaire de dimensions 31 cm, 4 cm et 4 cm.  Ce réservoir est posé à plat sur une table et l'une de ses faces de dimensions 31 cm, 4 cm est en contact avec la table.  Un autre réservoir ayant la forme d'une pyramide à base carrée est maintenu en position inversée de telle façon que sa base carrée soit parallèle à la table et que son cinquième sommet soit en contact avec la table.  Le réservoir a une hauteur de 10 cm et les côtés de sa base carrée mesurent 20 cm.  Au départ, le réservoir est plein d'eau tandis que le réservoir est vide.  Le réservoir commence à se remplir d'eau à un débit de 1 cm3 par seconde.  Deux secondes après que le réservoir a commencé à se remplir d'eau, le réservoir commence à se vider à un débit de 2 cm3 par seconde.  Quelle est la profondeur de l’eau dans le réservoir au moment où le volume d'eau dans le réservoir devient égal au volume d'eau dans le réservoir ? |  |
| Réservoir |
|  |
| Réservoir |

On suppose qu’à l’instant (en seconde), les deux réservoirs contiennent le même volume d’eau et qu’à l’instant 0, le réservoir est plein. Son volume d’eau, en cm3, est alors égal à .

A l’instant 2, ce réservoir commence à se vider à un débit de 2 cm3 par seconde, et cela pendant secondes. Donc, à l’instant , le volume d’eau dans le réservoir est égal à et celui, puisque le réservoir se remplit à un débit de 1 cm3 par seconde, le volume d’eau dans le réservoir est égal à .

Ces deux volumes sont égaux, ce qui s’écrit soit .

Le volume d’eau, en cm3, dans le réservoir est alors .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| On note d la profondeur de l’eau dans le réservoir à l’instant (voir la figure ci-contre). La pyramide qui constitue la forme prise par l’eau est une réduction de la pyramide représentant le réservoir (même sommet et base carrées parallèles) donc si est la longueur du côté de la base carrée du volume d’eau alors soit . |  |  |

On a donc soit soit soit

**Exercice 4**

Une tranche de pain carrée, ABCD, mesure . La tranche de pain a des croûtes sur trois côtés. Ces côtés, [AB], [BC] et [CD], sont représentés en gras dans la figure 1. Lorsqu’on coupe la tranche en petits morceaux, les morceaux sont dits *justes* si les deux conditions suivantes sont réunies :

* + Chaque morceau a la même aire ;
  + Chaque morceau a la même longueur de croûte.



1. Dans la figure 2, est le milieu de et est un point de la médiatrice du segment . Quelle doit être la position du point pour que la coupe suivant les segments et donne trois morceaux justes ?
2. Dans la figure 3, , est le milieu de , est un point de la médiatrice du segment , est un point de . On coupe en suivant les segments et de telle sorte d’avoir cinq morceaux justes. Déterminer la longueur et la longueur .
3. Dans la figure, les trois morceaux ont déjà la même longueur de croûte. On cherche donc la position du point telle que l’aire du triangle soit égale à l’aire des deux trapèzes rectangle et . L’aire commune de ces trois morceaux est le tiers de l’aire du carré soit

La médiatrice de est un axe de symétrie de la figure donc les deux trapèzes ont la même aire et celle-ci vaut .

Le point est donc tel que soit soit

1. Dans la figure 3, les cinq morceaux ont la même longueur de croûte et la somme des trois longueurs de ces trois croûtes vaut 90, cette longueur commune est .

En particulier, . Leur aire commune est

Par symétrie (d’axe la médiatrice de , le triangle est isocèle en et sa hauteur est telle que

soit .

Le trapèze rectangle a une aire égale à

Soit soit .

On en déduit .

**Exercice 5**

|  |  |
| --- | --- |
| Mathilde possède deux cartons rectangulaires de mêmes dimensions. Ces dimensions (la largeur et la longueur) sont des nombres entiers. La longueur des cartons est strictement supérieure à leur largeur. Mathilde superpose les deux cartons comme sur la figure ci-contre.  Elle réalise alors que l'aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons (en gris sur la figure) est un nombre entier.  Quelle est longueur minimale que pourraient avoir ces cartons ?  *(on admettra que les seuls nombres rationnels dont le carré est un entier sont des entiers)* |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Soit la longueur, la largeur des cartons et l’aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons.  Avec les notations de la figure ci-contre, on obtient deux triangles rectangles semblables dont les côtés de l’angle droit ont pour longueurs pour l’un et pour l’autre. On a donc soit . On en déduit  Soit |  |

Or d’après le théorème de Pythagore donc soit .

Ceci s’écrit aussi soit . Montrons que est un entier. Les nombres et sont des entiers donc est un nombre rationnel. De plus, donc est la racine carrée d’un nombre entier.

D’après la propriété admise, le nombre est un entier et le triplet est un triplet pythagoricien. On teste les triplets pythagoriciens les plus petits jusqu’à obtenir un entier pour l’aire :

Si alors , ce qui ne convient pas.

Si alors , ce qui ne convient pas.

Si alors , ce qui ne convient pas.

Si alors , qui est un entier. La plus petite valeur possible pour est donc 10.

**Exercice 6**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre, :   * + - * + le quadrilatère est un rectangle, et est le milieu du segment         + deux quarts de cercles sont tracés, l’un de centre C et d’extrémités et , l’autre de centre et d’extrémité .   Soit l’aire de la portion de plan située à l’intérieur du rectangle et à l’extérieur du grand quart de disque et soit l’aire de la région située à l’intérieur du grand quart de disque et à l’extérieur à la fois du rectangle et du petit quart de disque. |  |

Déterminer .

|  |  |
| --- | --- |
| Avec les notations de la figure ci-contre :  L’aire du quart de disque est , l’aire du rectangle est  et l’aire du petit quart de disque est .  On en déduit que    Soit . |  |

**Exercice 7**

|  |  |
| --- | --- |
| Le volume d’une sphère de rayon est .  L’aire totale d’un cône de révolution de hauteur et de base de rayon est où est la longueur d’une génératrice (voir figure ci-contre).  Le volume d’un cylindre de révolution de hauteur H et dont la base a pour rayon r est .   1. Calculer l’aire totale du cylindre. 2. Montrer que si un cône, une sphère et un cylindre ont le même rayon , si le cylindre et la sphère ont le même volume et si le cône et le cylindre ont la même aire totale alors et ne peuvent être tous les deux des entiers. |  |

1. Chaque base du cylindre a pour aire et l’aire latérale du cylindre est celle d’un rectangle de larguer et de longueur soit . L’aire totale du cylindre est donc .
2. La sphère et le cylindre ont même volume donc soit soit .

Le cône et le cylindre ont la même aire totale donc .

Ceci s’écrit aussi soit soit .

Or, si on note K le point d’intersection de la perpendiculaire à la base du cône passant par le sommet S du cône et A un point quelconque du cercle délimitant cette base, le triangle SAK est rectangle en K. Le théorème de Pythagore permet alors d’écrire soit soit

On a donc soit soit c’est-à-dire .

Comme 7 n’est pas un carré parfait, on ne peut avoir et tous les deux entiers.

**GÉOMÉTRIE PLANE**

**Exercice 1 – Vrai-Faux**

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si M est un point tel que MA + MB = AB alors M est un point du segment [AB].
2. Si M est un point tel que MA = MB alors M est le milieu de [AB].
3. Si la droite (AC) est la médiatrice du segment [BD] alors le quadrilatère ABCD est un losange.
4. Si M est le point d’intersection des médiatrices de [AD] et de [BC] alors les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
5. Si les segments [AB] et [CD] ont la même médiatrice, alors les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle.
6. V : conséquence de l’inégalité triangulaire
7. F : MA = MB signifie que M est sur la médiatrice de [AB]
8. F : si [BD] n’est pas aussi la médiatrice de [AC], on n’obtient qu’un « cerf-volant »
9. F : on a bien MA = MD et MB = MC mais on peut avoir .
10. V : les points A, B, C, D forment un trapèze isocèle donc les médiatrices des côtés non parallèles se coupent sur la médiatrice commune à [AB] et [CD] en un point O situé à égale distance des points A, B, C, D.

**Exercice 2 – Bissectrices concourantes**

*Rappel :* on appelle bissectrice d’un angle d’un triangle la droite qui passe par le sommet de l’angle et qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Montrer que les bissectrices des angles d’un triangle sont concourantes

|  |  |
| --- | --- |
| On note I le point d’intersection des bissectrices de l’angle en A et de l’angle en B (ce point existe car sinon les deux bissectrices seraient parallèles et la somme des mesures des angles en A et en B serait supérieure à 180°).  Il s’agit de montrer que (CI) est la bissectrice de l’angle en C.  On note P, Q et R les projetés orthogonaux de I respectivement sur (AB), (BC) et (CA).  Les triangles API et AQI sont isométriques car ils ont deux angles (donc trois) de même mesure et le côté [AI] en commun. |  |

Donc IQ = IP. De même les triangles IPB et IRB sont isométriques donc IP = IR. On en déduit IR = IQ.

Les triangles CIR et CIQ sont donc aussi isométriques car ils sont rectangles, ont la même hypoténuse et IR = IQ, ce qui garantit (d’après le théorème de Pythagore que leurs trois côtés sont deux à deux égaux.

En particulier , ce qui signifie que (CI) est bissectrice de l’angle en C.

Remarque : on a aussi démontré au passage qu’il existe un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle de centre I et passant par les points P, Q et R. On l’appelle *centre inscrit dans le triangle*.

**Exercice 3**

On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O (les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont des triangles équilatéraux.

On place les points P et Q respectivement sur les segments [BD] et [DF] tels que BC = BP = DQ.

Montrer que les points C, P et Q sont alignés.

|  |  |
| --- | --- |
| Le quadrilatère OBCD, constitué de deux triangles équilatéraux adjacents, est un losange donc la droite (BD) est médiatrice du segment [OC] et bissectrice de l’angle . Donc .  De plus, comme BP = BC et BC = OC (triangles équilatéraux), le triangle OBP est isocèle en B et .  Or les triangles OBP et CBP sont isométriques (2 côtés de même longueur encadrant un angle de même mesure), d’où .  D’autre part, montrons que  Les triangles EDQ, QDO et OBP sont aussi isométriques donc OQ = OP et le |  |

triangle QOP est isocèle en O d’où .

Or

Soit d’où

On en déduit que et que les points C, P et Q sont alignés.

**Exercice 4 – Cercle et angles**

1. **Cercle et triangle rectangle**

Montrer que si [AB] est un diamètre d’un cercle de centre I et si C est un point du cercle alors le triangle ABC est rectangle en C.

1. **Théorème de l’angle inscrit**

Montrer que si deux points A et B appartiennent à un cercle de centre O, alors pour tout point M de ce cercle tel que l’angle soit aigu, la mesure de l’angle est la moitié de la mesure de l’angle .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. On note D le point diamétralement opposé à C sur le cercle .   [AB] est un diamètre du cercle de centre I donc I est le milieu de [AB]. Par définition de D, I est aussi le milieu de [CD]. Le quadrilatère ADBC a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. C’est donc un parallélogramme.  De plus, comme C et A sont deux points de , IA = IC. On en déduit que les diagonales du quadrilatère ADBC ont même longueur.  Au final, le quadrilatère ADBC est un rectangle.  Puisque ABDC est un rectangle, ses angles aux sommets sont droits.  En particulier, le triangle ABC est rectangle en C |  |

*Remarque :* on vient de démontrer que si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre l’un des côtés du triangle, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. On commence par prouver que, si M’est le point diamétralement opposé à M, le résultat annoncé est vrai pour l’angle . Il suffit pour cela de considérer le triangle rectangle MM’A partagé en deux triangles isocèles OAM et AOM’ donc .   Or C est un point du cercle dont [MM’] est un diamètre donc  On a de même d’où |  |

Si le point O est intérieur au triangle AMB on procède par sommation de deux angles correspondant à la situation qui vient d’être traitée.

**Exercice 5 – Médianes concourantes**

Soit ABC un triangles et I, J les milieux respectifs des segments [BC] et [AC]. On note G le point d’intersection des droites (AI) et (BJ).

Montrer que la droite (BG) coupe le segment [AB] en un point K qui est le milieu de [AB] et préciser la position du point G sur [CK].

(On pourra introduire le symétrique G’ du point C par rapport au point G).

|  |  |
| --- | --- |
| Les points J et G sont par définition les milieux respectifs des segments [AC] et [CG’]. Les triangles JCG et ACG’ sont donc des triangles emboités et les droites (JG) et (AG’) sont parallèles. Or les points B, G et J sont alignés donc les droites (GB) et (AG’) sont parallèles.  On démontre de même que les droites (AG) et (G’B) sont parallèles.  On en déduit que le quadrilatère AG’BG est un parallélogramme.  Ses diagonales [GG’] et [AB] se coupent donc en leur milieu.  Le point K étant le milieu de [AB], la droite (CK) est la médiane issue de C dans le triangle ABC et les trois médianes (AI), (BJ) et (CK) sont bien concourantes.  On a de plus d’où |  |

Soit .

**Exercice 6**

On considère un triangle ABC isocèle en A dont tous les angles sont aigus. Le cercle de centre B et de rayon [BC] coupe [AC] en D et [AB] en E. On suppose de plus, que les triangles BCD et BED sont symétriques par rapport à (BD).

* 1. Déterminer la mesure de l'angle ?
  2. Prouver que le triangle AED est isocèle.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Les points C, D et E sont sur un même cercle de centre B donc   BC = BD = BE et les triangles BCD et BDE sont isocèles. Comme ils sont de plus symétriques par rapport à la droite (BD), ils sont isométriques.  Si on note et , comme le triangle ABC est isocèle en A, on peut donc écrire les égalités suivantes :  et    et dans le triangle BCD, d’où .   1. Dans le triangle ABC, soit .   D’autre part, .  On en déduit que le triangle AED est isocèle en E. |  |

**Exercice 7**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre, le quadrilatère est un rectangle, est un point de tel que , est perpendiculaire à , , est un point de et les droites et sont concourantes en .   1. Montrer que les triangles et sont semblables. 2. Déterminer les longueurs et. 3. Démontrer que. |  |

1. Les triangles et sont rectangles respectivement en et et leurs angles en sont opposés par le sommet donc de même mesure. Ils sont donc semblables.
2. Dans le triangle rectangle en , d’après le théorème de Pythagore,

d’où .

De même dans le triangle PQT, donc .

Comme est perpendiculaire à , le quadrilatère est un rectangle

d’où .

Comme les triangles et sont semblables, on peut écrire, soit soit .

1. On remarque que . On en déduit que les triangles et sont semblables d’où . Or (angles opposés par le sommet) donc .

Les droites (CD) et (TS) sont parallèles coupées par la droite (DP). Comme angles correspondants, on en déduit que . On a donc ce qui signifie que le triangle est isocèle en .

On a donc bien .

**DÉNOMBREMENT**

**Exercice 1**

L’année 2000 est bissextile. L’année 2100 ne sera pas bissextile. Voici les règles pour établir une année bissextile :

* L’année *A* n’est pas bissextile si *A* n’est pas divisible par 4.
* L’année *A* est bissextile si *A* est divisible par 4, mais pas par 100.
* L’année *A* n’est pas bissextile si *A* est divisible par 100, mais pas par 400.
* L’année *A* est bissextile si *A* est divisible par 400.

Combien y aura-t-il d’années bissextiles de l’an 2000 à l’an 3000 compris ?

Si on considère les 1001 années de l’an 2000 à l’an 3000, il y a 251 années dont le numéro est divisible par 4. Chacune est une année bissextile sauf les années 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700, 2900 et 3000. Il y a donc 251 – 8, ou 243 années bissextiles de l’an 2000 à l’an 3000.

**Exercice 2**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre, on voit le patron d'un cube dont chaque face porte un entier. On construit un cube plus grand à l'aide de 27 copies de ce cube.  Quelle est la somme minimale de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube ? |  |

Le grand cube est composé de 27 petits cubes répartis sur 3 étages. Sur les 27 petits cubes un seul n’a aucune face visible, 6 cubes ont une seule face visible (petits cubes situés aux centres des faces du grand cube), 12 ont deux faces visibles (petits cubes situés aux centres des 12 arêtes du grand cube) et 8 ont trois faces visibles (petits cubes situés aux sommets du grand cube). De plus, les faces du grand cube sont constituées de 54 faces de petits cubes (6 faces de 9 faces de petits cubes)

Pour obtenir la somme minimale de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube, on positionne chaque petit cube de manière que la somme des entiers sur ses faces visibles soit aussi petite que possible.

On positionne donc les :

* 6 petits cubes dont 1 face est visible de manière que le nombre qui parait sur cette face soit 1 ;
* 12 petits cubes dont 2 faces sont visibles (2 faces partageant une arête commune du grand cube) de manière que ces faces portent les entiers 1 et 2 (somme minimale égale à 3) ;
* 8 petits cubes dont 3 faces sont visibles (faces se rencontrant en un sommet du grand cube) de manière que ces faces portent les entiers 1, 2 et 3 (somme minimale égale à 6) ;

La somme minimale de de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube est alors :

Remarque : il y a bien sûr plusieurs possibilités pour positionner chaque petit cube.

**Exercice 3**

Soit un entier strictement positif quelconque. Alexis et Gabriel jouent à un jeu dans lequel ils additionnent à tour de rôle des entiers à un total cumulé.

Le premier qui joue est toujours Alexis et le total de départ est toujours 0. Au e tour, le joueur dont c'est le tour peut ajouter au total cumulé l'un des nombres entiers compris entre 1 et . Le gagnant est le joueur qui porte le total à exactement .

Par exemple, si , un jeu pourrait se dérouler comme ci-dessous et dans ce cas, on pourrait rajouter que c’est Alexis qui a gagné.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tour | Joueur | Entiers possibles | Choix du joueur | Total cumulé |
| 1 | Alexis | 1 | 1 | 1 |
| 2 | Gabriel | 1, 2 | 2 | 3 |
| 3 | Alexis | 1, 2, 3 | 1 | 4 |
| 4 | Gabriel | 1, 2, 3, 4 | 3 | 7 |
| 5 | Alexis | 1, 2, 3, 4, 5 | 3 | 10 |

Pour chaque valeur de , il existe une stratégie gagnante pour un de ces joueurs.

1. Si , déterminer une stratégie gagnante pour Gabriel.
2. Si , montrer que l’un des deux joueurs a une stratégie gagnante.
3. Au premier tour, Alexis doit choisir 1. Une stratégie gagnante pour Gabriel consiste à choisir 2 au 2e tour (le premier pour Gabriel). Le total cumulé est alors égal à 3.

Au 3e tour, Alexis peut choisir 1, 2 ou 3, ce qui porterait respectivement le total cumulé à 4, à 5 ou à 6.

Au 4e tour, Gabriel choisit alors respectivement 4, 3 ou 2 (correspondant aux choix 1, 2, ou 3 d'Alexis) pour toujours porter le total cumulé à 8 et gagne toujours.

1. Montrons qu’Alexis a une stratégie gagnante en remarquant que .

Au premier tour, Alexis doit choisir 1.

Au 2e tour, Gabriel peut choisir 1 ou 2. Et au 3e tour Alexis peut choisir 1, 2 ou 3. Dans tous les cas, Alexis peut faire en sorte qu’au 3e tour le total cumul soit 5 ( ou ).

Au 5e tour, Alexis peut choisir 1, 2, 3, 4 ou 5 et faire en sorte qu’au 4e tour, le total cumulé soit égal à 10

( ou ou ou ).

Au 6e tour, Gabriel peut choisir 1, 2, 3, 5, 5 ou 6.

Au 7e tour, Alexis peut choisir 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 et faire en sorte qu’au 8e tour, le total cumulé soit égal à 17

( ou ou ou ou ou ) et gagne toujours.

**Exercice 4**

Dans un groupe de 20 étudiants, chaque étudiant a exactement trois amis intimes dans la classe. Cinq des étudiants ont acheté des billets pour un concert à venir. Si un étudiant voit que deux ou trois de ses amis intimes ont acheté des billets, il en achètera un aussi.

Est-il possible que tous les étudiants du groupe achètent des billets pour le concert ?

(On suppose que l’amitié intime est réciproque : si l’étudiant est un ami intime de l’étudiant , alors est un ami intime de l’étudiant ).

On appelle paire *amicale* une paire d’amis intimes. Si on relie chaque étudiant à ses 3 amis intimes, on représente chaque paire amicale par l’un des 60 segments obtenus. Pour ne pas compter deux fois chaque paire amicale (une fois par ami), on divise par 2 et on obtient 30 amitiés intimes.

On a au départ 5 acheteurs de billet. Si l’un des étudiants d’une paire amicale achète un billet après les 5 premiers acheteurs et que l’autre étudiant de la paire a déjà un billet, on dit que la paire amicale est *efficace*. Une paire amicale ne peut être efficace qu’une seule fois.

Si les 20 étudiants ont acheté un billet, alors trois paires amicales sont efficaces lorsque le dernier étudiant achète un billet. Le nombre de paires amicales efficaces est au moins égal à ce qui est supérieur au nombre de paires amicales.

Il est donc impossible que tous les étudiants achètent un billet.

**Exercice 5**

Lucie fabrique des bracelets en utilisant cinq perles, qui peuvent être de trois couleurs différentes : rouges, vertes et bleues. Elle peut utiliser la même couleur plusieurs fois et ne pas utiliser certaines couleurs si elle le souhaite.

Combien de bracelets **différents** Jade peut-elle fabriquer, si on considère que deux bracelets identiques à une rotation près comptent comme le même bracelet ?

On peut dénombrer les bracelets en traitant les cas selon le nombre de couleurs de perles.

Il y a 3 bracelets formés de perles d’une seule couleur.

Pour deux couleurs A et B (choisies de 6 façons), il y un arrangement possible avec le choix de 4 perles de couleur A et 1 perle de couleur B, et deux arrangements possibles avec 3 perles de couleur A et deux perles de couleurs B, pour un total de 18 bracelets.

Finalement, pour trois couleurs A, B et C, il y a 4 arrangements possible avec 3 perles de couleur A, une perle de couleur B et une perle de couleur C : il y a trois choix pour la couleur A, donc au total 2 bracelets.

Il reste le choix de 2 perles de couleur A, 2 perles de couleur B et une perle de couleur C : il y a alors 6 configurations possibles, et comme on a trois choix pour la couleur C, cela donne bracelets.

On obtient un total de bracelets.

**Exercice 6**

Kylian a une boîte contenant trois types de fruits différents : des pommes, des poires et des bananes. Dans la boîte, 21 fruits ne sont pas des pommes, 25 fruits ne sont pas des poires et 28 fruits ne sont pas des bananes.

Combien y a-t-il de fruits dans la boîte ?

21 fruits ne sont pas des pommes, donc la somme du nombre de poires et du nombre de bananes est 21.

25 fruits ne sont pas des poires, donc la somme du nombre de pommes et du nombre de bananes est 25.

28 fruits ne sont pas des bananes, alors la somme du nombre de pommes et du nombre de poires est 28.

Si l'on additionne ces trois sommes , on compte deux fois le nombre de poires, deux fois le nombre de bananes et deux fois le nombre de pommes (puisque chaque nombre parait dans exactement deux des sommes précédentes).

Comme , le nombre de fruits dans la boîte est 37.

**Exercice 7**

Il y a sept points sur une feuille de papier. Exactement quatre de ces points sont placés en ligne droite. Aucune autre droite ne contient plus de deux des points. Si on forme des triangles dont les sommets sont choisis parmi ces points, combien de triangles peut-on former ?

On considère trois cas par rapport aux quatre points qui sont situés sur une même droite.

*1er cas*

Les triangles n’ont aucun sommet sur la droite.

Puisqu’il n’y a que trois points qui ne sont pas sur la droite, on ne peut former qu’un triangle avec ces points.

*2e cas*

Les triangles ont chacun un sommet sur la droite.

Il y a quatre choix possibles pour le point sur la droite. Pour chacun de ces choix, il y a trois façons de choisir deux des trois points qui ne sont pas sur la droite. Il y a donc triangles possibles.

*3e cas*

Les triangles ont chacun deux sommets sur la droite.

Il y a six façons de choisir deux points sur la droite. Pour chaque choix, on peut choisir un des trois points qui ne sont pas sur la droite. Il y a donc triangles possibles.

En tout, il y a triangles possibles.

**NOMBRES**

**Exercice 1**

Une liste contient exactement trois entiers différents dont la moyenne est 50 et dont l'étendue est 14.

Quel est le plus petit entier possible de cette liste ?

On note ces trois entiers où .

La moyenne égale à 50 se traduit par et l’étendue égale à 14 se traduit par ce qui donne l’équation

Comme on doit avoir, ce qui entraine . De plus, comme et 136 sont des entiers pairs, doit aussi être un entier pair.

On étudie les différentes valeurs paires possibles pour telles que et .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 46 | 48 | 50 | 52 | **54** | 56 |
|  | 45 | 44 | 43 | 42 | **41** | 40 |
|  | 59 | 58 | 57 | 56 | **55** | 54 |

La valeur de qui donne le plus petit entier a tout en respectant les contraintes données dans l’énoncé est donc et la plus petite valeur de correspondante est

**Exercice 2**

|  |  |
| --- | --- |
| On choisit cinq entiers différents de 1 à 6 et on place chacun d'eux dans une des cases de la figure ci-contre de telle façon que :   * la somme des trois entiers dans la colonne verticale est égale à 7   et   * la somme des trois entiers dans la rangée horizontale est égale à 11.   Quel entier ne figure dans aucune des cases ? |  |

On commence par vérifier les trois seuls entiers compris entre 1 et 6 dont la somme est 7 sont 1, 2 et 4 :

* si le plus petit de ces entiers est 1, la somme des deux autres doit être 6 des entiers qui ne peut être obtenue qu’avec 2 et 4 pour avoir trois entiers deux à deux distincts.
* si le plus petit de ces entiers est 2, la somme des deux autres doit être 5 qui ne peut être obtenue qu’avec 1 et 4 (on retrouve les mêmes) ou 2 et 3 (impossible car cela donnerait deux 2).
* si le plus petit de ces entiers est 3, la somme des deux autres doit être 4 qui ne peut être obtenu qu’avec 1 et 3 ou 2 et 2, cas impossibles car comportant deux fois le même entier ;
* …

En procédant de même, on peut vérifier que la somme 11 ne peut être obtenue qu’avec les nombres 1, 4, 6 ou 2, 3, 6 ou 2, 4, 5.

Si les entiers dans la rangée horizontale sont 1, 4, 6, alors la colonne verticale et la rangée horizontale ont deux entiers en commun, à savoir 1 et 4, ce qui est impossible.

De même, la rangée horizontale ne peut contenir les entiers 2, 4 et 5.

Donc, les entiers dans la rangée horizontale sont 2, 3, 6. De plus, puisque 2 est l'entier commun aux deux listes, il doit figurer dans la case du milieu.

L'entier qui ne figure dans aucune case est 5.

**Exercice 3**

Cinq entiers deux à deux distincts et strictement positifs ont une somme égale à 264. Le plus grand diviseur commun de ces cinq entiers strictement positifs est noté .

Quelle est la somme des chiffres de la plus grande valeur possible de ?

Les plus petites valeurs pouvant être prises par cinq entiers deux à deux distincts et ayant pour diviseur commun sont . La plus petite somme possible de ces cinq entiers est . On a donc soit .

On cherche donc les diviseurs de 264 inférieurs à 17,6. Or ce qui nous permet de trouver les diviseurs de 264 inférieurs à 17,6 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12. La plus grande valeur possible de est donc 12 et la somme de ses chiffres est .

**Exercice 4**

Pour tout entier positif de quatre chiffres noté où et , on appelle somme de l’inverse des chiffres de le nombre

Par exemple, pour , .

1. Montrer que pour tout nombre , il existe deux entiers et tels que
2. Déterminer le nombre d’entiers tels que .
3. On remarque que

d’où

soit .

1. On cherche donc et tels que .

Nécessairement sinon et ne peut valoir . De plus et sont positifs strictement donc . Si alors s’écrit ce qui est impossible car est multiple de 10. Donc .

Comme et sont strictement positifs, les couples solutions sont donc (1,2) et (2,1).

De plus, on déduit soit . Comme et sont positifs ou nuls, les couples sont (0,8), (1,7), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1), (8,0).

Au final les entiers solutions sont

**Exercice 5**

On construit une liste de nombres de la façon suivante :

* Le premier nombre est 3, le deuxième est 4 ;
* Si le nombre précède le nombre dans la liste, le nombre qui suit dans la liste est le quotient par de la somme de et 1.

Par exemple, le troisième nombre de la liste est .

Déterminer le plus petit entier strictement positif pour lequel la somme des premiers nombres de la liste est un entier impair supérieur à 2 024.

On calcule les premiers termes de la liste :

3, 4, . En retombant sur 3 puis 4, on constate que la liste se répètera tous les 5 nombres et qu’on retrouvera les nombres , dont la somme est . Or et . La somme des nombres jusqu’au 195e est

On calcule donc les sommes des premiers termes de la liste pour .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Numéro dans la liste | 976 | 977 | 978 | 979 | 980 | 981 | 982 |
| Nombre de la liste | 3 | 4 |  |  | 1 | 3 | 4 |
| Somme des nombres | 2 018 | 2 022 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Numéro dans la liste | 983 | 984 | 985 | 986 | 987 | 988 | **989** |
| Nombre de la liste |  |  |  |  | 4 |  |  |
| Somme des nombres |  |  |  |  |  |  |  |

Le plus petit entier positif pour lequel la somme des premiers nombres de la liste est un entier impair supérieur à 2 024 est donc .

**Exercice 6**

|  |  |
| --- | --- |
| On dispose d’un nombre illimité de *tétrominos* en forme de T (figure ci-contre composée de quatre carrés de côté 1) et d’un plateau carré de cases carrées de côté 1. On peut placer ces tétrominos, éventuellement après les avoir fait pivoter) à condition qu’il n’y ait aucun chevauchement de tétrominos et qu’aucun tétrimino ne déborde du plateau.  Déterminer les valeurs de pour lesquelles on peut couvrir entièrement le plateau avec des tétrominos. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| On remarque déjà que si est un multiple de 4, on peut recouvrir entièrement le plateau avec des tétrominos. En effet s’il existe un entier tel que alors le plateau sera recouvert par une grille de carrés comme celui formé sur la figure ci-contre.  On suppose maintenant que n’est pas un multiple de 4. Comme chaque tétromino couvre 4 cases du plateau, l’aire totale du plateau doit être un nombre pair. Le nombre ne peut donc être impair car alors serait aussi impair. |  |

De plus, si l’on colorie les cases du plateau en alternant les cases blanches avec les cases noires en commençant par une case blanche en bas à gauche, on obtient le même nombre de cases blanches et de cases noires, ce nombre étant . Or, comme les cases blanches ne partagent aucune frontière commune, chaque tétromino couvre un nombre impair de cases blanches (1 ou 3).

On va donc étudier les deux cas où est pair :

* Si le reste de la division euclidienne de par 4 est 0, alors on a vu qu’on peut recouvrir entièrement le plateau
* Sinon, le reste de la division euclidienne de par 4 est 2 c’est-àdire il existe un entier tel que . Alors le nombre de cases blanches est qui est un nombre pair. Or, le nombre de tétrominos à positionner est qui est un nombre impair d’où une contradiction puisqu’en additionnant un nombre impair de nombres impairs, on obtient un nombre impair.

**Exercice 7**

Montrer que le nombre défini par est un entier et déterminer cet entier.

Pour tout entier strictement positif, .

En appliquant cette égalité à variant de 1 à 1 012, on en déduit que .

Les termes se simplifiant deux à deux, il reste