|  |  |
| --- | --- |
|  | **François Viète (1540 – 1603)****Naissance de l’algèbre moderneUne image contenant portrait, croquis, Visage humain, Barbe humaine  Description générée automatiquement**Juriste de formation, il est avocat puis conseiller au Parlement de Paris avant de devenir conseiller des rois Henri III et Henri IV.**Une image contenant texte, livre, arbre, illustration  Description générée automatiquement**Il est réputé pour avoir, au service du roi, décrypté des messages codés des armées ennemies (espagnoles). Il crée un code pour Sully.Il étudie l’astronomie, cherche à résoudre les problèmes classiques de géométrie, et publie en 1591 le petit livre « *In artem analyticem Isagoge »*. Il y introduit des notations modernes (pour les signes opératoires, pour la désignation des inconnues et des *coefficients*) et décrit les phases logiques d’une démonstration. Il termine par la résolution « ***Nullum non problema solvere*** », trois siècles avant le « ***Wir müssen wissen, wir werden wissen*** » de Hilbert. |
| **Lycée Marie Curie****VERSAILLES** **Collège** **François Furet ANTONY** |

***Stage ouvert aux collégiennes et collégiens***

***des classes de troisième – 21 et 22 octobre 2024***

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent ou ont hébergé nos stages : l’INRIA, l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet à Antony, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspectrices et inspecteurs :** Luca AGOSTINO,Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Marion PACAUD, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

**Les intervenants professeurs :** Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Rémi NIGUES (collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d’Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES)

**Professeurs accompagnants :**

***Emploi du temps***

***Lundi 21 octobre 2023***

|  |  |
| --- | --- |
| ***Antony*** | ***Versailles*** |
|  | ***Groupe 1*** | ***Groupe 2*** | ***Groupe 3*** |
| **10.00** | **Accueil** | **10.00** | **Accueil** |
| **10.10** | **NOMBRES****NR** | **10.10** | **NOMBRES** **CD**  | **AIRES ET VOLUMES PM** | **GEOMETRIE PLANE****RN** |
| **12.10** | **Repas** | **12.10**  | **Repas** |
| **13.00** | **AIRES ET VOLUMES NR** | **13.00****15.00** | **GEOMETRIE PLANE****RN** | **NOMBRES****CD** | **AIRES ET VOLUMES****PM** |
| **15.10** | **FILMS** | **15.10** | **Exposé : « le nombre** $π$**»****+ Films** |

***Mardi 22 octobre 2024***

|  |  |
| --- | --- |
| ***Antony*** | ***Versailles*** |
|  | ***Groupe 1*** | ***Groupe 2*** | ***Groupe 3*** |
| **10.00** | **Accueil** | **10.00** | **Accueil** |
| **10.10** | **GEOMETRIE PLANE CS** | **10.10** | **AIRES ET VOLUMES****PM**  | **DENOMBREMENT****CD** | **DENOMBREMENT****SM** |
| **12.10** | **Repas** | **12.10**  | **Repas** |
| **12.45** | **DENOMBREMENT****XG** | **13.00****15.00** | **DENOMBREMENT****SM** | **GEOMETRIE****PLANE RN** | **NOMBRES****CD** |
| **14.30** | **QIUIZ****Exposé : « le nombre** $π$**»** | **15.10** | **Quiz** |

**AIRES ET VOLUMES**

**Exercice 1**

|  |  |
| --- | --- |
| On construit un *shuriken* à l’aide d’arcs de cercles (voir la figure ci-contre). Il possède six axes de symétrie et les arcs de cercles sont deux à deux tangents à leur point commun (à chaque « pointe » de la figure).On suppose que la largeur du shuriken (distances entre deux « pointes » opposées) est égale à 10.Déterminer l’aire du shuriken. |  |

**Exercice 2**

|  |  |
| --- | --- |
| Deux cercles de rayons 9 et 17 sont contenus dans un rectangle dont un des côtés a pour longueur 50. Les deux cercles sont tangents l’un à l’autre et à deux côtés adjacents du rectangle comme dans la figure ci-contre.Déterminer l’aire du rectangle. |  |

**Exercice 3**

|  |  |
| --- | --- |
| Un réservoir $A$ est un prisme droit à base rectangulaire de dimensions 31 cm, 4 cm et 4 cm.Ce réservoir est posé à plat sur une table et l'une de ses faces de dimensions 31 cm, 4 cm est en contact avec la table.Un autre réservoir $B$ ayant la forme d'une pyramide à base carrée est maintenu en position inversée de telle façon que sa base carrée soit parallèle à la table et que son cinquième sommet soit en contact avec la table.Le réservoir $B$ a une hauteur de 10 cm et les côtés de sa base carrée mesurent 20 cm.Au départ, le réservoir $A$ est plein d'eau tandis que le réservoir $B$ est vide.Le réservoir $B$ commence à se remplir d'eau à un débit de 1 cm3 par seconde.Deux secondes après que le réservoir $B$ a commencé à se remplir d'eau, le réservoir $A$ commence à se vider à un débit de 2 cm3 par seconde.Quelle est la profondeur de l’eau dans le réservoir $B$ au moment où le volume d'eau dans le réservoir $A$ devient égal au volume d'eau dans le réservoir $B $? |  |
| Réservoir $A$ |
|  |
| Réservoir $B$ |

**Exercice 4**

Une tranche de pain carrée, ABCD, mesure $30×30$. La tranche de pain a des croûtes sur trois côtés. Ces côtés, [AB], [BC] et [CD], sont représentés en gras dans la figure 1. Lorsqu’on coupe la tranche en petits morceaux, les morceaux sont dits *justes* si les deux conditions suivantes sont réunies :

* + Chaque morceau a la même aire ;
	+ Chaque morceau a la même longueur de croûte.



1. Dans la figure 2, $M$ est le milieu de $[AD]$ et $N$ est un point de la médiatrice du segment $\left[AD\right]$. Quelle doit être la position du point $N$ pour que la coupe suivant les segments $[MN], [NB]$ et $[NC]$ donne trois morceaux justes ?
2. Dans la figure 3, , $M$ est le milieu de $[AD]$, $T$ est un point de la médiatrice du segment $\left[AD\right]$, $S $est un point de $[MT]$. On coupe $ABCD$ en suivant les segments $[MT], [TP], [TQ], [SU]$ et $[SV]$ de telle sorte d’avoir cinq morceaux justes. Déterminer la longueur $PQ $et la longueur $ST$.

**Exercice 5**

|  |  |
| --- | --- |
| Mathilde possède deux cartons rectangulaires de mêmes dimensions. Ces dimensions (la largeur et la longueur) sont des nombres entiers. La longueur des cartons est strictement supérieure à leur largeur. Mathilde superpose les deux cartons comme sur la figure ci-contre.Elle réalise alors que l'aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons (en gris sur la figure) est un nombre entier. Quelle est longueur minimale que pourraient avoir ces cartons ?*(on admettra que les seuls nombres rationnels dont le carré est un entier sont des entiers)* |  |

**Exercice 6**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre, :* + - * + le quadrilatère $FCDG$ est un rectangle, $CD=CE=30$ et $F$ est le milieu du segment $[EC].$
				+ deux quarts de cercles sont tracés, l’un de centre C et d’extrémités $E$ et $D$, l’autre de centre $F$ et d’extrémité $E$.

Soit $x$ l’aire de la portion de plan située à l’intérieur du rectangle $FCDG$ et à l’extérieur du grand quart de disque et soit $y$ l’aire de la région située à l’intérieur du grand quart de disque et à l’extérieur à la fois du rectangle $FCDG$ et du petit quart de disque. |  |

Déterminer $y-x$.

**Exercice 7**

|  |  |
| --- | --- |
| Le volume d’une sphère de rayon $r$ est $\frac{4}{3}πr^{3}$. L’aire totale d’un cône de révolution de hauteur $h$ et de base de rayon $r$ est $πr^{2}+πrs$ où $s$ est la longueur d’une génératrice (voir figure ci-contre).Le volume d’un cylindre de révolution de hauteur H et dont la base a pour rayon r est $πr^{2}×H$.1. Calculer l’aire totale du cylindre.
2. Montrer que si un cône, une sphère et un cylindre ont le même rayon $r$, si le cylindre et la sphère ont le même volume et si le cône et le cylindre ont la même aire totale alors $h$ et $H$ ne peuvent être tous les deux des entiers.
 |  |

**GÉOMÉTRIE PLANE**

**Exercice 1 – Vrai-Faux**

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si M est un point tel que MA + MB = AB alors M est un point du segment [AB].
2. Si M est un point tel que MA = MB alors M est le milieu de [AB].
3. Si la droite (AC) est la médiatrice du segment [BD] alors le quadrilatère ABCD est un losange.
4. Si M est le point d’intersection des médiatrices de [AD] et [BC] alors les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
5. Si les segments [AB] et [CD] ont même médiatrice, alors les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle.

**Exercice 2 – Bissectrices concourantes**

*Rappel :* on appelle bissectrice d’un angle d’un triangle la droite qui passe par le sommet de l’angle et qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Montrer que les bissectrices des angles d’un triangle sont concourantes

**Exercice 3**

On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O (les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont des triangles équilatéraux.

On place les points P et Q respectivement sur les segments [BD] et [DF] tels que BC = BP = DQ.

Montrer que les points C, P et Q sont alignés.

**Exercice 4 – Cercle et angles**

1. **Cercle et triangle rectangle**

Montrer que si [AB] est un diamètre d’un cercle $C$ de centre I et si C est un point du cercle $C$ alors le triangle ABC est rectangle en C.

1. **Théorème de l’angle inscrit**

Montrer que si deux points A et B appartiennent à un cercle de centre O, alors pour tout point M de ce cercle tel que l’angle $\hat{AMB}$ soit aigu, la mesure de l’angle $\hat{AMB}$ est la moitié de la mesure de l’angle $\hat{AOB}$.

**Exercice 5 – Médianes concourantes**

Soit ABC un triangles et I, J les milieux respectifs des segments [BC] et [AC]. On note G le point d’intersection des droites (AI) et (BJ).

Montrer que la droite (BG) coupe le segment [AB] en un point K qui est le milieu de [AB] et préciser la position du point G sur [CK].

(On pourra introduire le symétrique G’ du point C par rapport au point G).

**Exercice 6**

On considère un triangle ABC isocèle en A dont tous les angles sont aigus. Le cercle de centre B et de rayon [BC] coupe [AC] en D et [AB] en E. On suppose de plus, que les triangles BCD et BED sont symétriques par rapport à (BD).

* 1. Déterminer la mesure de l'angle $\hat{BAC}$ ?
	2. Prouver que le triangle AED est isocèle.

|  |  |
| --- | --- |
| **Exercice 7**Dans la figure ci-contre, le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, $P$ est un point de $[BC]$ tel que $\hat{APD}=90°$, $\left(TS\right)$ est perpendiculaire à $\left(BC\right)$, $BP=PT, AP=20, PQ=15$, $R$ est un point de $[CD]$ et les droites $(AR), (TS)$ et $(PD)$ sont concourantes en $Q$.1. Montrer que les triangles $PQT$ et $DQS$ sont semblables.
2. Déterminer les longueurs $QS$ et$ SD$.
3. Démontrer que$ QR=RD$.
 |  |

**DÉNOMBREMENT**

**Exercice 1**

L’année 2000 est bissextile. L’année 2100 ne sera pas bissextile. Voici les règles pour établir une année bissextile :

* L’année *A* n’est pas bissextile si *A* n’est pas divisible par 4.
* L’année *A* est bissextile si *A* est divisible par 4, mais pas par 100.
* L’année *A* n’est pas bissextile si *A* est divisible par 100, mais pas par 400.
* L’année *A* est bissextile si *A* est divisible par 400.

Combien y aura-t-il d’années bissextiles de l’an 2000 à l’an 3000 compris ?

**Exercice 2**

|  |  |
| --- | --- |
| Dans la figure ci-contre, on voit le patron d'un cube dont chaque face porte un entier. On construit un cube plus grand à l'aide de 27 copies de ce cube. Quelle est la somme minimale de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube ? |  |

**Exercice 3**

Soit $N$ un entier strictement positif quelconque. Alexis et Gabriel jouent à un jeu dans lequel ils additionnent à tour de rôle des entiers à un total cumulé.

Le premier qui joue est toujours Alexis et le total de départ est toujours 0. Au $k$e tour, le joueur dont c'est le tour peut ajouter au total cumulé l'un des nombres entiers compris entre 1 et $k$. Le gagnant est le joueur qui porte le total à exactement $N$.

Par exemple, si $N = 10$, un jeu pourrait se dérouler comme ci-dessous et dans ce cas, on pourrait rajouter que c’est Alexis qui a gagné.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tour | Joueur | Entiers possibles | Choix du joueur | Total cumulé |
| 1 | Alexis | 1 | 1 | 1 |
| 2 | Gabriel | 1, 2 | 2 | 3 |
| 3 | Alexis | 1, 2, 3 | 1 | 4 |
| 4 | Gabriel | 1, 2, 3, 4 | 3 | 7 |
| 5 | Alexis | 1, 2, 3, 4, 5 | 3 | 10 |

Pour chaque valeur de $N$, il existe une stratégie gagnante pour un de ces joueurs.

1. Si $N = 8$, déterminer une stratégie gagnante pour Gabriel.
2. Si $N = 17$, montrer que l’un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

**Exercice 4**

Dans un groupe de 20 étudiants, chaque étudiant a exactement trois amis intimes dans la classe. Cinq des étudiants ont acheté des billets pour un concert à venir. Si un étudiant voit que deux ou trois de ses amis intimes ont acheté des billets, il en achètera un aussi.

Est-il possible que tous les étudiants du groupe achètent des billets pour le concert ?

(On suppose que l’amitié intime est réciproque : si l’étudiant $A$ est un ami intime de l’étudiant $B$, alors $B$ est un ami intime de l’étudiant $A$).

**Exercice 5**

Lucie fabrique des bracelets en utilisant cinq perles, qui peuvent être de trois couleurs différentes : rouges, vertes et bleues. Elle peut utiliser la même couleur plusieurs fois et ne pas utiliser certaines couleurs si elle le souhaite.

Combien de bracelets **différents** Jade peut-elle fabriquer, si on considère que deux bracelets identiques à une rotation près comptent comme le même bracelet ?

**Exercice 6**

Kylian a une boîte contenant trois types de fruits différents : des pommes, des poires et des bananes. Dans la boîte, 21 fruits ne sont pas des pommes, 25 fruits ne sont pas des poires et 28 fruits ne sont pas des bananes.

Combien y a-t-il de fruits dans la boîte ?

**Exercice 7**

Il y a sept points sur une feuille de papier. Exactement quatre de ces points sont placés en ligne droite. Aucune autre droite ne contient plus de deux des points. Si on forme des triangles dont les sommets sont choisis parmi ces points, combien de triangles peut-on former ?

**NOMBRES**

**Exercice 1**

Une liste contient exactement trois entiers différents dont la moyenne est 50 et dont l'étendue est 14.

Quel est le plus petit entier possible de cette liste ?

**Exercice 2**

|  |  |
| --- | --- |
| On choisit cinq entiers différents de 1 à 6 et on place chacun d'eux dans une des cases de la figure ci-contre de telle façon que :* la somme des trois entiers dans la colonne verticale est égale à 7

et* la somme des trois entiers dans la rangée horizontale est égale à 11.

Quel entier ne figure dans aucune des cases ? |  |

**Exercice 3**

Cinq entiers deux à deux distincts et strictement positifs ont une somme égale à 264. Le plus grand diviseur commun de ces cinq entiers strictement positifs est noté $d$.

Quelle est la somme des chiffres de la plus grande valeur possible de $d $?

**Exercice 4**

Pour tout entier positif de quatre chiffres noté $N=\overbar{a bcd}$ où $a\ne 0$ et $b\ne 0$, on appelle somme de l’inverse des chiffres de $N$ le nombre $S=\overbar{a bcd}+\overbar{d cba}.$

Par exemple, pour $N=1 205$, $S=1 205+5 021=6 226$.

1. Montrer que pour tout nombre $N=a bcd$, il existe deux entiers $m$ et $n$ tels que

$$S=m\left(a+d\right)+n(b+c)$$

1. Déterminer le nombre d’entiers $N$ tels que $S=3 883$.

**Exercice 5**

On construit une liste de nombres de la façon suivante :

* Le premier nombre est 3, le deuxième est 4 ;
* Si le nombre $a$ précède le nombre $b$ dans la liste, le nombre qui suit $b$ dans la liste est le quotient par $a$ de la somme de $b$ et 1.

Par exemple, le troisième nombre de la liste est $\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3}$.

Déterminer le plus petit entier strictement positif $N$ pour lequel la somme des $N$ premiers nombres de la liste est un entier impair supérieur à 2 024.

**Exercice 6**

|  |  |
| --- | --- |
| On dispose d’un nombre illimité de *tétrominos* en forme de T (figure ci-contre composée de quatre carrés de côté 1) et d’un plateau carré de $n×n$ cases carrées de côté 1. On peut placer ces tétrominos, éventuellement après les avoir fait pivoter) à condition qu’il n’y ait aucun chevauchement de tétrominos et qu’aucun tétrimino ne déborde du plateau.Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles on peut couvrir entièrement le plateau avec des tétrominos.  |  |

**Exercice 7**

Montrer que le nombre $N$ défini par $N=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)…\left(1+\frac{1}{2 022}\right)\left(1+\frac{1}{2 024}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)…\left(1-\frac{1}{2 022}\right)\left(1-\frac{1}{2 014}\right)}$ est un entier et déterminer cet entier.