En avant la musique

Éléments de solutions

PREMIERE QUESTION

a) Fréquence de LA_8

La fréquence de LA_4 est 870 Hz ; celle de LA_5 : 2x870 ; LA_6 : 4x870 ; LA_7 : 8x870 et LA_8 : 16x870 = **13920 Hz**, audible pour la plupart des individus.

b) Fréquence de LA_0

La fréquence de LA_2 est 217,5 Hz ; celle de LA_1 : $\frac{217,5}{2}$ et celle de LA_0 : $\frac{217,5}{4} = 54,375\ Hz$, audible pour tout le monde.

c) Nombre d'octaves entre 15 et 38000 Hz

$\frac{38000}{15} \approx 2533$; entre quelles puissances de 2 se situe 2533 ?

Or $2^{11} = 2048$ et $2^{12} = 4096$.

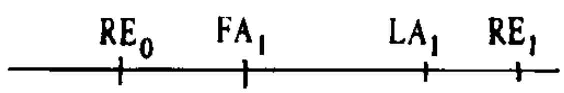
Il y a donc **plus de 11 octaves** entre 5 et 38000 Hz.

d) Quel «LA » entre 7,5 et 15 Hz ?

La fréquence de LA_0 est 54,375 Hz ; celle de LA_{-1} : 27,875 Hz et celle de LA_{-2} : 13,59375 ; la fréquence de LA_{-2} est entre 7,5 et 15 Hz.

DEUXIÈME QUESTION (gamme de Pythagore)

a) Fréquence de LA_1



LA est une quinte au-dessus de RÉ

Partons de $RÉ_1$: 1,6875 *f*

d'où $RÉ_0$: 0,84375 *f*

et LA_1 : $\frac{3}{2} \times 0,84375 f = 1,265625 f$

ou en fraction $\frac{3}{2} \times \frac{27}{32} f = \frac{81}{64} f$ qui est bien entre *f* et 2*f*.

b) Fréquence de $M1_1$

Le MI, situé une quinte au-dessus de LA, a une fréquence $\frac{3}{2} \times \frac{81}{64} f = \frac{243}{128} f$. Cette fréquence est entre *f* et 2*f*, il s'agit donc bien de $M1_1$.

c) Fréquence de SI$_1$

Le SI au-dessus de M1$_1$ a une fréquence $\frac{3}{2}\times\frac{243}{128}f=\frac{729}{256}f\approx 2{,}85f$

S1$_1$ est donc une octave en dessous (pour que sa fréquence soit entre f et $2f$) soit $\frac{729}{512}f$.

d) La gamme harmonique

Ordonnons les notes selon les fréquences trouvées, qui sont rappelées ici ;

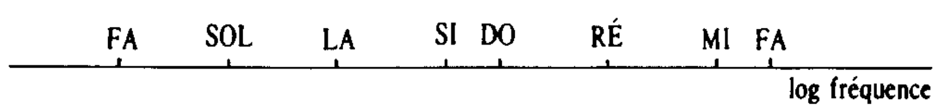
note	FA$_1$	SOL$_1$	LA$_1$	SI$_1$
fréquence	1	9/8	81/64	729/512
valeur approchée	1	1,125	1,266	1,424

note	DO$_1$	RÉ$_1$	M1$_1$	FA$_2$
fréquence	3/2	27/16	243/128	2
valeur approchée	1,5	1,687	1,898	2

Le calcul des rapports des fréquences de deux notes successives donne

9/8 ; 9/8 ; 9/8 ; 256/243 ; 9/8 ; 9/8 ; 256/243.

On remarque qu'il n'y a que deux types d'intervalles, ce qui fait qu’une représentation sur échelle logarithmique suivante aura l'allure suivante :



TROISIÈME QUESTION

a) Quatre quintes au-dessus de FA

Si on remarque que : 1 dièse + 1 quinte = 1 quinte + 1 dièse, on peut ajouter les quatre quintes à FA, et les dièses ensuite ; on trouve donc : DO # ; SOL # ; RE # et LA #.

b) La cinquième quinte après FA :

De la même façon qu'au a), ajoutons d'abord cinq quintes à FA et diésons ensuite : on obtient MI # dont la fréquence est $\frac{243}{128}\times\frac{3^7}{2^{11}}=\frac{3^{12}}{2^{18}}\approx 2{,}03$.

Divisons-la par 2 pour être entre 1 et 2 il vient $\frac{3^{12}}{2^{19}}\approx 1{,}0136$.

MI # se place donc entre FA et FA #, la note la plus proche étant FA. Le dièse est donc plus grand que le demi-ton.

c) Valeur du comma pythagoricien :

L'intervalle de douze quintes est un rapport $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}}$. L'intervalle de 7 octaves est un rapport 2^7.

La « différence » entre les deux est le rapport $\frac{3^{12}}{2^{12}} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}0136 \neq 1$. Il n'y a pas égalité.

Or la « différence » entre un dièse et un demi-ton est donnée par la division $\frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$.

On a bien : $\boxed{\text{12 quintes – 7 octaves = 1 dièse – 1 demi-ton}}$.

d) Comparaison des quintes et des octaves

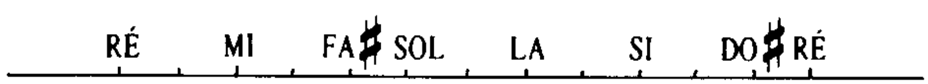
Une puissance de 3 est impaire ; une puissance de 2, paire : il ne peut jamais y avoir égalité !

Or une égalité du type *n* quintes = *p* octaves signifie $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^p$ soit : $3^n = 2^{n+p}$.

Ce qui est impossible. Une telle égalité n'a donc jamais lieu.

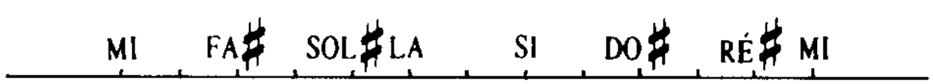
QUATRIÈME QUESTION

a) Altérations de la gamme de RÉ :



La « grille » de la gamme de DO (appliquée à la gamme de RÉ) donne deux altérations : FA et DO.

b) Altérations de la gamme de MI :



Il y a cette fois quatre altérations : FA, SOL, DO et RÉ.

CINQUIÈME QUESTION (gamme de Zarlino)

Intervalle de quarte.

(FA, LA DO) est un accord parfait ; DO est donc une quinte au-dessus de FA ; le rapport $\frac{FA}{DO}$ vaut donc $\frac{2}{3}$ (inverse de $\frac{3}{2}$) ; le FA dont la fréquence est entre 1 et 2 est une octave au-dessus soit 4/3.

L'intervalle de quarte de Zarlino vaut 4/3.

Intervalle de sixte.

(FA, LA, DO) est un accord parfait ; LA est la tierce de FA ;

sa fréquence est donc 5/4 x 4/3 = 5/3

L'intervalle de sixte vaut donc 5/3*.*

SIXIÈME QUESTION

a) Comparaison de LA # et SI *b*

Il y a un ton majeur entre LA et SI. Or un ton majeur se décompose en un dièse plus un comma « plus » un bémol ; LA # et SI *b* diffèrent juste d'un comma : on peut les confondre.

b) Un intervalle qui est son propre renversement

Le rapport *x* d'un tel intervalle serait tel que $\frac{2}{x} = x$ soit $x = \sqrt{2}$.

Cette valeur n'est pas dans la gamme de Zarlino. Approchons $\sqrt{2}$ à un comma près ; on cherche alors un rapport dans l'intervalle $\left[\frac{80}{81}\sqrt{2};\frac{81}{80}\sqrt{2}\right]$ soit à peu près : [1,397 ; 1,432].

On est donc entre la quarte et la quinte, de rapports 1,333 et 1,5. Par exemple, si DO est la fondamentale, on est entre FA et SOL.

FA # « vaut » $\frac{4}{3}\times\frac{16}{15} = \frac{64}{45} \approx 1{,}422$ et SOL *b* « vaut » $\frac{3}{2}\times\frac{24}{25} = \frac{36}{25} \approx 1{,}440$.

FA # est donc à moins d'un comma de l'intervalle idéal $\sqrt{2}$.

c) Le problème des transpositions

Une valeur plus simple est proche de $\sqrt{2}$: c'est 1,4 soit 7/5 qu'on va adopter sous la dénomination de «quinte diminuée», et confondre avec FA #.

Calculons les fréquences de la gamme de RÉ (par multiplication par 9/8).

fréquence	9/8	*6/5*	81/64	27/20	45/32	3/2
valeur théorique	9/8	6/5	5/4	4/3	7/5	3/2
rapport	1	1	81/80	81/80	225/224	1
commas	0	0	1	1	<1	0

fréquence	63/40	27/16	9/5	15/8	81/40	135/64
valeur théorique	8/5	5/3	9/5	15/8	2	32/15
rapport	63/64	81/80	1	1	81/80	2025/2048
commas	>1	1	0	0	1	<1

Une valeur est trop différente de la valeur théorique : la quinte diminuée.

Faisons les mêmes calculs pour la gamme de MI.

fréquence	5/4	4/3	45/32	3/2	25/16	5/3
valeur théorique	5/4	4/3	7/5	3/2	8/5	5/3
rapport	1	1	225/224	1	125/128	1
différence en commas	0	0	<1	0	≈ 2	0

fréquence	7/4	15/8	2	25/12	9/4	75/32
valeur théorique	9/5	15/8	2	32/15	9/4	12/5
rapport	35/36	1	1	375/384	1	375/384
différence en commas	≈ 2	0	0	≈ 2	0	≈ 2

La situation est bien plus mauvaise ici : quatre notes ont deux commas d'écart avec leur valeur théorique la ?, la quinte diminuée (encore elle !), la sixte et la septième.

La gamme de Zarlino se prête mal aux transpositions.

SEPTIÈME QUESTION (gamme tempérée)

Ici l'intervalle de quinte vaut $2^{\frac{7}{12}}$: douze quintes successives correspondront donc aux puissances de 2 suivantes :

$$\frac{7}{12};\ \frac{14}{12};\ \frac{21}{12};\ \frac{28}{12};\ \frac{35}{12};\ \frac{42}{12}\ ;\ \frac{49}{12};\ \frac{56}{12};\ \frac{63}{12};\ \frac{70}{12};\ \frac{77}{12};\ \frac{84}{12}.$$

On se ramène à un nombre entre 0 et 1 (car $2^0 = 1$ et $2^1 = 2$) en soustrayant le plus grand entier possible aux exposants ci-dessus. Il vient :

$$\frac{7}{12};\ \frac{2}{12};\ \frac{9}{12};\ \frac{4}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{6}{12}\ ;\ \frac{1}{12};\ \frac{8}{12};\ \frac{3}{12};\ \frac{10}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{0}{12}.$$

On retrouve exactement toutes les puissances de 2 de la gamme tempérée !

On aurait aussi bien pu raisonner avec la « spirale des notes » puisque multiplier par $2^{\frac{7}{12}}$ « avance » de sept cases sur les douze qui forment un tour.