

VI. Fonction exponentielle

Partie A Définition

1°/ Rappels

Voici le tableau de variations de la fonction $\ln x$:

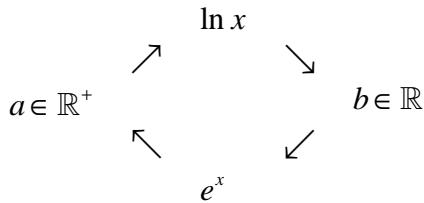
x	0	x_0	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	λ	$+\infty$

Diagramme de variation : une courbe croissante passant par (x_0, λ) avec des flèches indiquant l'augmentation de la fonction.

Pour tout réel λ , il existe donc un unique x_0 de $]0; +\infty[$ tel que $\ln x_0 = \lambda$.

Cet unique réel se note e^λ .

La fonction exponentielle notée e^x ou $\exp(x)$ est donc la fonction réciproque de la fonction \ln d'où :



On a donc si $a > 0$:

$$b = \ln a \Leftrightarrow a = e^b$$

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln(e^b) = b$$

2°/ Courbe et limites.

a) Limites aux bornes de l'ensemble de définition

La fonction \exp est définie sur \mathbb{R} , il faut donc étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'après le tableau de variation de la fonction \ln :

x	0	e^λ	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	λ	$+\infty$

Diagramme de variation : une courbe croissante passant par (e^λ, λ) avec des flèches indiquant l'augmentation de la fonction.

Si λ tend vers $-\infty$, e^λ tend vers 0 donc

$$\text{Théorème 1. limite en } -\infty \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Si λ tend vers $+\infty$, e^λ tend vers $+\infty$ donc

$$\text{Théorème 2. limite en } +\infty \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

On remarque par ailleurs que si λ augmente e^λ augmente donc

Théorème 3. La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

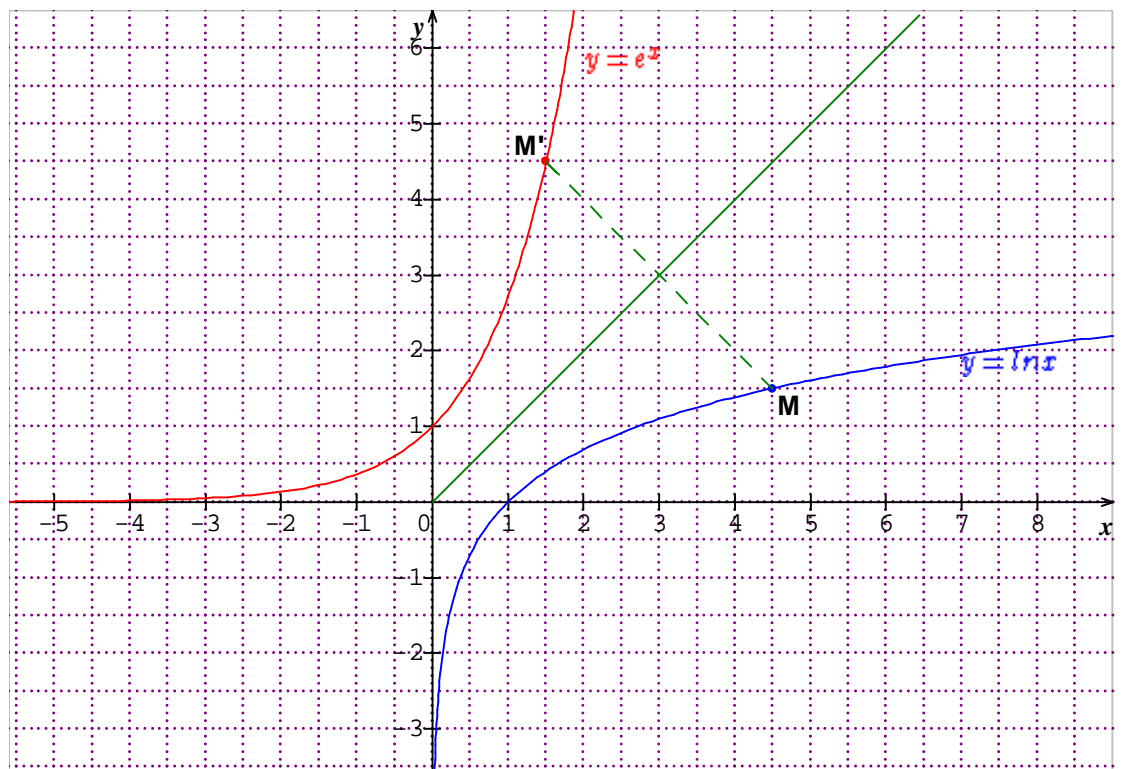
b) Courbe représentative.

Soit $M(x; y)$ un point de la courbe représentative de la fonction \ln .

On a alors $x > 0$ et $y = \ln x$. Par conséquent, $x = e^y$ donc le point $M'(y; x)$ est situé sur la courbe représentative de la fonction \exp .

On a donc le théorème suivant :

Théorème 4. Dans un repère orthonormé, les courbes C_{\exp} et C_{\ln} représentatives des fonctions \exp et \ln sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$



c) Tableau de variation de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$

↗

d) Conséquence sur les résolutions d'équations et d'inéquations

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a le théorème suivant :

Théorème 5. Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Théorème 6. Pour tout réel x , on a : $e^x > 0$

Exercices N°24 ; (25 à 29 p 147 pour le .../...)

Partie B Calcul de fonctions dérivées

Théorème 7. La fonction e^x est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a $(e^x)' = e^x$

Démonstration : On admet le fait que la fonction e^x est dérivable sur \mathbb{R} .

On a $\ln(e^x) = x$ donc en dérivant les deux membres de l'égalité, on obtient :

$$\frac{(e^x)'}{e^x} = 1 \text{ car si } u \text{ est une fonction dérivable, on a } (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

D'où (produit en croix), $(e^x)' = e^x$

Exemple 1: Calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = 2x^2 + 3e^x + 5$$

$$g(x) = (e^x + 1)(x^2 - 5)$$

$$k(x) = \frac{e^x + 5}{x}$$

Théorème 8. Soit u une fonction dérivable. Alors la fonction e^u est dérivable sur \mathbb{R} et on a $(e^u)' = u' e^u$.

Justification : conséquence directe sur la dérivation des fonctions composées.

Exemple 2: Calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = e^{2x-5}$$

$$g(x) = e^{x+1}(x^2 - 5)$$

$$k(x) = \frac{2x-5}{3e^{4x-12}}$$

Exercices N° 78 ; 79 p 149 (n°80 ; 81 ; 82 p 149 pour le .../...)

Partie C Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Théorème 9. Soit a et b deux nombres réels.

$$\text{On a : } e^{a+b} = e^a e^b$$

Plus généralement : $e^{a_1+a_2+\dots+a_n} = e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n}$

$$\text{Dem : } \ln(e^{a+b}) = a+b$$

$$\ln(e^a e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a+b \text{ donc on a bien : } e^{a+b} = e^a e^b$$

Théorème 10. Pour tout réel a et tout entier relatif $e^{ap} = (e^a)^p$

Démonstration :

$$\ln\left((e^a)^p\right) = p \ln(e^a) = pa \text{ et on a bien : } e^{pa} = (e^a)^p$$

Théorème 11. Pour tous réels a et b :

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

Exercice : n° 31 ; 32 p 147 (33 ; 35 ; 36 ; 39 ; 40 p 147 pour lr .../...)
 N°47 p 148 (48 ; 49 ; 51 ; 52 p 148 pour le .../...)

(simplificat° écriture)
 (équat°, inéquat°)

Partie D Théorème des croissances comparées

Théorème 12. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow 0} x^n e^x = 0.$$

A retenir : lorsqu'il y a forme indéterminée, l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x .

Rq : lorsqu'il y a forme indéterminée, les puissances de x l'emportent sur la fonction \ln donc lorsqu'il y a forme indéterminée, l'exponentielle l'emporte sur le \ln .

Exemple 3: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{15} e^x = +\infty$ (Opération sur les limites)

Exemple 4: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{15} e^x = 0$ (TCC)

Exemple 5: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$ (TCC)

Exemple 6: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{25}}{e^x} = -\infty$ (opérations sur les limites)

Exemple 7: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{25}}{e^x} = 0$ (TCC)

Exercice : n°67 ; 70 p 149
 N°71 ; 76 ; 77 p 149

Partie E Bilan :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
				$+\infty$
			e	
e^x		1		
$e^0 = 1$		0		
$e^1 = e$				
$(e^x)' = e^x$				

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$(e^a)^p = e^{pa}$$

Rq : on retrouve les règles opératoires sur les puissances entières, connues depuis le collège, d'où le choix de la notation en puissances pour la fonction exponentielle

Exercice : n° 84 p 150 n°105 p 156

Activité 1 p 140 ; activité 3 p 142 et 143