académie Versailles RÉGION ACADÉMIQUE ÎLE-DE-FRANCE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE Liberté • Égalité • Fraternité RÉPUBLIQUE FRANÇAISE	**BTS FED** **Option : Domotique et bâtiments communicants** **Nom :** **Prénom :** **Établissement : Lycée Jean Jaurès** **Ville : Châtenay-Malabry**	
Épreuve E3 : Mathématiques	**Situation d'évaluation n°2**	**Date :** **Durée : 55 min**

Le sujet est composé de deux exercices indépendants. Il comporte 4 pages.

L'usage de la calculatrice ou des logiciels installés sur les ordinateurs est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

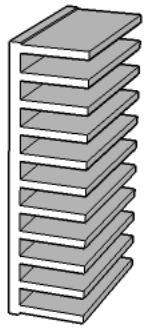
Dans la suite du document :

- Pour les questions signalées par une  , il existe une fiche d'aide. La réclamer si besoin.
- Les appels au professeurs mentionnés en gras après certaines questions font partie intégrante de l'évaluation et sont donc obligatoires.

Thèmes : équations différentielles, statistique inférentielle.

Exercice 1

La carte mère d'un ordinateur nécessite d'être refroidie en permanence, sous peine de dysfonctionnement. Pour cela on utilise un radiateur, constitué de plusieurs plaques parallèles, appelée ailettes, collées à la carte-mère (voir figure ci-contre).

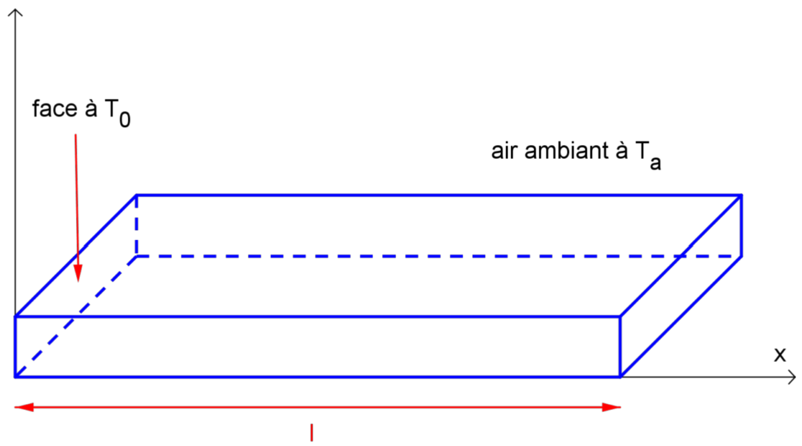


On pose la question suivante :

« Quelle taille minimale doit faire une ailette de refroidissement pour dissiper intégralement la chaleur ? »

Partie A : modélisation de la température dans l'ailette

On considère l'ailette comme une plaque parallélépipédique de longueur l, collée en $x = 0$ à la carte-mère. En régime stationnaire, on admet que la température T de la plaque, exprimée en degré Celsius, ne dépend que de l'abscisse x, exprimée en millimètre.
En $x = 0$, la température de la plaque est égale à celle de la carte mère, c'est à dire T_0.
La température de l'air ambiant est appelée T_a.



Dans ces conditions, le bilan énergétique de l'ailette nous conduit à l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad \mu^2 T''(x) = T(x) - T_a \quad ,$$

où µ est une constante dépendant de la largeur, de l'épaisseur et de la conductivité thermique de la plaque.

1. Montrer que la fonction $f(x) = T_a$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène (H) associée à (E), en fonction de µ.

Appeler le professeur pour vérification

3. On veut maintenant déterminer la fonction solution T de (E) vérifiant les conditions initiales suivantes :
   - On suppose qu'une ailette de longueur infinie dissiperait suffisamment la chaleur émise par la carte mère pour que la température à son extrémité soit égale à la température de l'air ambiant, c'est à dire que $\lim_{x \to +\infty} T(x) = T_a$.
   - $T(0) = T_0$.

Partie B : en situation réelle

On suppose les conditions suivantes :

- $T_0 = 50°C$;
- $T_a = 20°C$;
- $\mu^2 = 100$.

La température de l'ailette de refroidissement, exprimée en degré Celsius, est modélisée par la fonction *T*, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par $T(x)=30e^{-\frac{x}{10}}+20$.

L'abscisse *x* est exprimée en millimètre.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique de la température de l'ailette.

2. Calculer la valeur exacte du nombre dérivé de *T* en $x = 0$ et en $x = 10$.

3. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer les tangentes à *T* en $x = 0$ et en $x = 10$. À quel endroit de l'ailette la dissipation de la chaleur est-elle la plus rapide ?

4. On admet que la chaleur est suffisamment dissipée si $T(l)\approx T_a$ avec une précision de 1 %. En déduire la valeur minimale de la longueur *l* de l'ailette répondant au problème. On donnera la valeur approchée au millimètre, par excès.

Appeler le professeur pour exposer votre démarche

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

Le contrôle de la température repose beaucoup sur les capteurs. Nous désirons étudier la qualité d'un capteur spécialisé dans la mesure de température d'une habitation.

Le constructeur annonce une résolution de 1/16ème de degré Celsius, et une précision typique de 0,25°C.

- La résolution est la plus petite variation de température que le capteur est capable de mesurer.
- La précision typique est l'écart type entre la température mesurée et la température réelle, dans des conditions habituelles d'utilisation (-40° < t < 95°C).

Ne pouvant tester l'ensemble de la production, nous avons effectué des mesures avec un échantillon de 30 capteurs.
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Température mesurée (°C)	Effectif
21,4	1
21,6	2
21,7	3
21,8	2
21,9	1
22	3
22,1	8
22,2	5
22,3	5

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ_e des températures pour cet échantillon. On considère que les capteurs de l'échantillon sont bien étalonnés si la température moyenne $\overline{x}$ est égale à la température réelle, plus ou moins la résolution du capteur. Sachant que la température réelle était de 22°C, que penser de l'étalonnage des capteurs de cet échantillon ?

2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart-type σ des températures mesurées par l'ensemble de la production dans les mêmes conditions. Comparer le résultat obtenu pour σ à la donnée du constructeur.

3. Proposer une estimation de la température μ par un intervalle de confiance.

Appeler le professeur pour exposer votre démarche

4. Quelle doit être la taille minimale n de l'échantillon pour connaître, avec le coefficient de confiance de 95%, la température moyenne mesurée par l'ensemble de la production à 0,1°C près ?

Aide pour l'exercice 1, partie A, question 3

Admettons que $T(x)=C_1 e^{\frac{x}{\mu}}+C_2 e^{-\frac{x}{\mu}}+T_a$, avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

a) Calculer la limite de T en $+\infty$. En déduire la valeur d'une des deux constantes réelles.

b) Exprimer ensuite $T(0)$. Conclure.

Aide pour l'exercice 1, partie B, question 4

Calculer la température T_{min} supérieure à T_a de 1 %. Ensuite, résoudre $T(x)=T_{min}$.

Aide pour l'exercice 2, question 3

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille $n = 30$ obtenu comme précédemment, associe la moyenne $\overline{x}$ des températures de l'échantillon. On prend pour valeur de σ la valeur donnée par le constructeur. L'intervalle de confiance de la température moyenne μ mesurée par l'ensemble de la production est obtenu grâce à la formule suivante :

$$I=[\overline{x}-t\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}+t\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$