| | |
|---|---|
| académie Versailles<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE<br>Liberté • Égalité • Fraternité<br>RÉPUBLIQUE FRANÇAISE | **CCF MATHEMATIQUES**<br>**Brevet technicien supérieur**<br>**Spécialité : Systèmes Numériques**<br>**Épreuve E3**<br>**Coefficient : 3**<br>**Durée : 55 min**<br>**Situation d'évaluation n°2** |

- **La calculatrice est autorisée.**
- **Vous pouvez utiliser les logiciels mis à votre disposition même si ce n'est pas clairement demandé.**
- **La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**
- **Sauf mention contraire dans l'énoncé, chaque réponse devra être justifiée.**
- **Le sujet est composé de deux exercices indépendants.**

**Thèmes abordés**
- Transformée en z
- Probabilités

Dans la suite du document,

- Les appels obligatoires sont indiqués par la mention :

  **Appeler le professeur pour valider la réponse**

  ou

  **Appeler le professeur pour expliquer la démarche**

- La possibilité d'avoir une aide est indiquée par la mention :

  **Aide**

## Exercice 1

On considère un filtre numérique dans lequel le signal d'entrée est $n \longmapsto e(n)$, l'échelon causal discret défini par : $\begin{cases} e(n) = 0 \text{ pour } n < 0 \\ e(n) = 1 \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$.
Le signal de sortie est un signal discret causal noté $n \longmapsto x(n)$.
Le filtre est régi par l'équation récurrente $(E) : x(n) - 2x(n-1) = e(n)$.
On se propose de déterminer $x(n)$ en utilisant deux méthodes différentes.

**Partie A : première méthode**

On résout l'équation récurrente ($E$) à l'aide de suites numériques.

1. Justifier que $x(0) = 1$ puis calculer $x(1)$.

2. Pour tout entier naturel $n$, l'équation ($E$) s'écrit $x(n) - 2x(n-1) = 1$.
   On considère la suite $y$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $y(n) = x(n) + 1$.
   a) A l'aide d'un tableur, déterminer les 15 premiers termes de la suite $y$.
   b) Donner l'expression de $y(n)$puis celle de $x(n)$en fonction de $n$.

**Appeler le professeur pour valider la réponse**

**Partie B : deuxième méthode**

On résout l'équation récurrente ($E$) en utilisant la transformation en $Z$.

*On donne ci-dessous le tableau des transformées en Z des signaux causaux de référence.*

La suite $x$ admet une transformée notée $X(z)$.

1. En appliquant la transformée en $Z$ à l'équation($E$), montrer que, pour tout $z$ différent de 1 et 2,

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

2. a) A l'aide d'un logiciel de calcul formel, trouver deux réels $A$ et $B$ tels que, pour tout $z$ différent de 0, 1 et 2,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}.$$

**Appeler le professeur pour valider la réponse**

b)En déduire le signal de sortie $x(n)$ pour tout entier naturel.

3. Représenter, dans un repère orthogonal, le signal de sortie pour les nombres entiers $n$ compris entre $-2$ et $3$.
On prendra comme unités graphiques2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

| Signal | Transformée en Z |
|---|---|
| *Echelon unité discrete* :<br>pour tout $n$ de N, $e(n) = 1$. | $Ze : z \mapsto Ze(z) = \frac{z}{z-1}$ |
| *Impulsion discrète d* :<br>$d(0) = 1$ et, pour tout $n$ de N*, $d(n) = 0$ | $Zd : z \mapsto Zd(z) = 1$ |
| *Rampe discrète* :<br>pour tout $n$ de N, $r(n) = n$ | $Zr : z \mapsto Zr(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ |
| *Signal carré discret* :<br>pour tout $n$ de N, $c(n) = n^2$ | $Zc : z \mapsto Zc(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| *Signal exponentiel discret* :<br>pour tout $n$ de N, $x(n) = a^n$, $a$ réel non nul | $Zx : z \mapsto Zx(z) = \frac{z}{z-a}$ |
| Multiplication par $a^n$ :$y(n) = x(n)a^n$ | $(Zy)(z) = Zx(\frac{z}{a})$ |
| Signal retardé : $y(n) = x(n - n_0)$ | $z^{-n_0}[Zx(z)]$ |
| Signal avancé :$y(n) = x(n + 1)$ | $(Zy)(z) = z[Zx(z) - x(0)]$ |

## Exercice 2

*Les probabilités demandées seront arrondies à 0,001 près.*

On s'intéresse au temps écoulé, en secondes, entre l'arrivée de deux paquets de données numériques sur le réseau informatique d'une grande société. Une étude statistique a montré que la moyenne de ces temps, en secondes, est environ 0,0016 secondes.
On admet que la variable aléatoire $T$ correspondant au temps écoulé, en secondes, entre l'arrivée de deux paquets de données numériques sur ce réseau informatique, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
Sur le graphique ci-dessous est représentée la fonction de densité $f$ de la variable aléatoire $T$, définie sur $[0; +\infty[$.


1. a) A l'aide du graphique, émettre une conjecture concernant l'expression de $f(t)$.
   b) A l'aide des données de l'énoncé, retrouver l'expression exacte de $f(t)$.

**Appeler le professeur pour valider la réponse**

2. a) Calculer la probabilité de l'événement $A$ : « le temps écoulé, en secondes, entre l'arrivée de deux paquets de données numériques sur ce réseau informatique est au moins égal à 0,001 seconde » ;
   b) Interpréter graphiquement le nombre $P(A)$ et représenter cet ensemble sur le graphique ci-dessus.

3. a) Ecrire un algorithme affichant la valeur $t_0$telle qu'il se soit écoulé moins de $t_0$ secondes, entre l'arrivée de deux paquets de données numériques sur ce réseau informatique, avec une probabilité $p$ fixée par l'utilisateur.
   b) Programmer puis exécuter cet algorithme pour $p = 0{,}95$. Donner le résultat affiché.
   c) Retrouver le résultat par le calcul.

**Aide**

***Fin du sujet***

*AIDES*

**Aide1 exercice 2**

Compléter l'algorithme suivant affichant la valeur $t_0$ telle qu'il se soit écoulé moins de $t_0$ secondes, entre l'arrivée de deux paquets de données numériques sur ce réseau informatique, avec une probabilité $p$ fixée par l'utilisateur.

| | |
|---|---|
| Variables | $t$, $p$ nombres réels |
| Initialisation | |
| | $t$ prend la valeur…….. |
| Traitement | |
| | Lire $p$ |
| | Tant que………… |
| | $t$ prend la valeur $t + 0.001$ |
| | Fin boucle tant que |
| Sortie | |
| | Afficher ............ |

**Aide2 exercice 2**

Pour $p = 0{,}95$, cet algorithme affiche $t = 0{,}005$. Interpréter et retrouver par le calcul ce résultat.