<table>
<tr><td rowspan="3">Lycée Jules Ferry
29 avenue du Maréchal Joffre
78 000 Versailles</td><td>Épreuve E3</td><td>Mathématiques</td></tr>
<tr><td rowspan="2">NOM :

Prénom :</td><td>CCF - Situation d'évaluation n°2
Session 2016</td></tr>
<tr><td>BTS Systèmes numériques.
Option IR</td></tr>
<tr><td>Professeur responsable</td><td>Sophie Gillon</td><td>Durée : 55 minutes</td></tr>
</table>

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- L'utilisation des logiciels est recommandée. Vous préciserez alors sur votre copie le logiciel utilisé et la démarche choisie.
- Pour les questions suivies de la mention "Appel", l'élève pourra appeler le professeur afin d'expliquer sa démarche, ou valider un raisonnement, ou demander de l'aide.
- L'élève devra utiliser au moins une fois l'appel à l'enseignant (l'un des appels est obligatoire), mais au maximum trois fois (sur les questions suivies de la marque "appel" de son choix)
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

<u>**Thèmes :**</u>

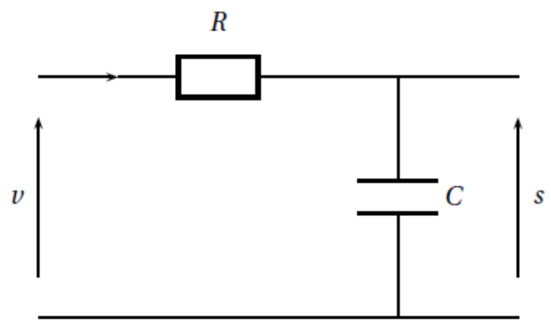
Équations différentielles et transformée en Z

(Les deux parties peuvent être traitées de façon totalement indépendante)

Calcul matriciel et probabilités

$\boxed{\text{Exercice 1}}$:

On considère un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur représenté par le schéma ci-dessous :



s représente la tension entre les bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par une source de tension v et parcouru par un courant i .

Les fonctions s et v sont liées par l'équation différentielle suivante :

(E) : $RCs'(t)+s(t)=v(t)$

Où R est la résistance exprimée en Ohms, C la capacité du condensateur exprimée en Farads, s la tension en Volts, v tension en Volts.

La condition initiale n'est pour l'instant pas précisée.

Dans tout cet exercice, on prendra $R = 250\times10^3\,\Omega$ et $C = 20\times10^{-9}\,F$.

Partie A : équations différentielles

Q1 En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, proposez une représentation des courbes des fonctions solutions possibles de l'équation différentielle (E), dans le cas où $v(t)$ est une constante et la condition initiale de la forme $s(0)=a$, pour tout nombre t positif.

APPEL

On suppose désormais que $v(t)=2$ pour tout nombre réel positif ou nul.

Q2 Quelle conjecture sur l'écriture de la solution générale s de l'équation différentielle $0{,}005s'(t)+s(t)=2$, C_1 étant une constante réelle quelconque, pouvez-vous proposer parmi les écritures suivantes :

$s(t)=C_1e^{-200t}+2t$	$s(t)=C_1e^{-200t}+2$	$s(t)=C_1e^{200t}+2$	$s(t)=C_1e^{-200t}$

Vous recopierez votre réponse sur votre copie et celle-ci sera argumentée par utilisation de Q1, ou de tout logiciel.

Appelez le professeur afin de valider cette question et la précédente

Q3 Démontrez alors la conjecture choisie dans la question précédente.

Q4 On suppose de plus que $s(0)=0$. Quelle doit alors être la valeur de la constante C_1 dans la réponse choisie. (votre réponse sera précisément justifiée)
Comment pouvez-vous contrôler votre réponse ?

APPEL

Partie B : Simulation numérique

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal causal discret x et la tension de sortie s par un signal causal discret y .

Un pas de discrétisation T_e en secondes étant choisi, les signaux x et y vérifient alors pour tout nombre entier n l'équation : $(E): 0{,}005\dfrac{y(n)-y(n-1)}{T_e}+y(n)=x(n)$

Dans toute cette partie, on choisit $T_e=0{,}5\times10^{-3}$ (en secondes); on admet qu'alors l'équation (E) s'écrit (E_2): $11y(n)-10y(n-1)=x(n)$.

Q5 On suppose que le signal d'entrée est donné par $x(n)=2e(n)$ où e est l'échelon unité causal discret défini donc par $e(n)=1$ si $n\geq 0$, 0 sinon.

On note Y la transformée en Z du signal causal discret y .

En appliquant la transformée en Z aux deux membres de l'équation (E_2), montrez que

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2}{11}\times\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{10}{11}\right)}.$$

Signal	Transformée en Z
Échelon unité discret e : Pour tout $n\in N, e(n)=1$	$Ze: z\mapsto Ze(z)=\dfrac{z}{z-1}$
Impulsion unité d : $d(0)=1$ et pour tout $n\in N^*, d(n)=0$	$Zd: z\mapsto Zd(z)=1$
Rampe discrète r : Pour tout $n\in N, r(n)=n$	$Zr: z\mapsto Zr(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$
Signal carré discret c : Pour tout $n\in N, c(n)=n^2$	$Zc: z\mapsto Zc(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
Signal exponentiel discret : Pour tout $n\in N, x(n)=a^n$, a réel non nul	$Zx: z\mapsto Zx(z)=\dfrac{z}{z-a}$
Multiplication par a^n : $y(n)=x(n)a^n$, a réel non nul	$Zy(z)=Zx\left(\dfrac{z}{a}\right)$
Signal retardé : $y(n)=x(n-n_0), n_0\in N$	$Zy(z)=\dfrac{1}{z^{n_0}}Zx(z)$
Signal avancé : $y(n)=x(n+1)$	$Zy(z)=z(Zx(z)-x(0))$

Q6 Proposez et mettez en œuvre une démarche permettant de modifier l'écriture de $\dfrac{Y(z)}{z}$ afin de déterminer l'original de $Y(z)$.

En déduire l'original $y(n)$ de $Y(z)$ en fonction de l'entier n .

APPEL

$\boxed{\text{Exercice 2}}$:

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n°1, alors il ira soit sur la page n°2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°2, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n°2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$ soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°3, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n°2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$ soit il restera sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n , on définit les événements et les probabilités suivants :

- A_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°1", et on note $a_n = p(A_n)$.
- B_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°2", et on note $b_n = p(B_n)$.
- C_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°3", et on note $c_n = p(C_n)$.

On notera P_n l'état à la n-ième navigation, vous pourrez choisir indifféremment $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ ou $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Q7 Construire le graphe probabiliste associé à ce processus aléatoire.
Donnez alors la matrice de transition T associée à la matrice état P_n choisie.

Q8 Quelle est la relation de récurrence liant les états P_n et P_{n+1} ?
Donnez alors P_n en fonction de n , P_0 et T , où P_0 est l'état initial (non donné pour l'instant)

Q9 Proposez une estimation des fréquences de fréquentation du site et de ses pages à long terme (expliquez votre démarche) lorsque :

a. On commence obligatoirement par la page n°1 : état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
b. On commence obligatoirement par la page n°2
c. On commence obligatoirement par la page n°3

APPEL