LYCÉE JEAN PERRIN
Technologies et Sciences de l'Ingénieur
SAINT OUEN L'AUMÔNE

CCF MATHEMATIQUES

Brevet technicien supérieur

Spécialité : Systèmes Numériques
Option B
Épreuve E3
Coefficient : 3

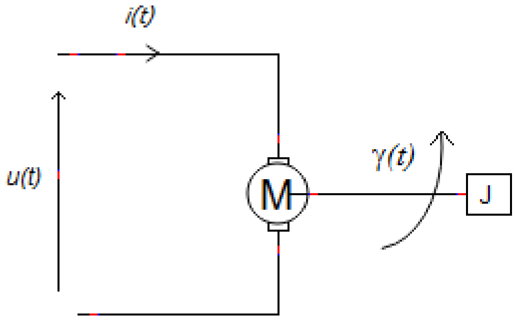
Situation d'évaluation n°2
Durée : 55 minutes

— L'usage de la calculatrice et de logiciels de géométrie, de calcul formel sont autorisés.
— La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
— L'épreuve comporte deux exercices.

Thèmes abordés

— Équations différentielles
— Probabilités 2
— Calcul matriciel

Exercice 1
L'objet de cet exercice est d'étudier la vitesse angulaire d'un moteur à aimant permanent.
Le système est schématisé ci-dessous :



où $u(t)$ représente la tension d'alimentation du moteur,$i(t)$ l'intensité du courant qui traverse le moteur et $\gamma(t)$ la vitesse angulaire du moteur.
La résistance de l'induit, R, est exprimée en Ω, la charge entrainée par le moteur présente un moment d'inertie J exprimé en $kg.m^2$.Les frottements et les pertes magnétiques se traduisent par un couple proportionnel à la vitesse angulaire.Le coefficient de proportionnalité, $f =$ est exprimé en $N.m.rad^{-1}.s$ et la constante du couple $k =$ est exprimée en $V.rad^{-1}.s$.

Les trois fonctions u, i et γ sont définies sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la fonctionγ est dérivable sur$\mathbb{R}^+$.
La vitesse angulaire du moteur vérifie l'équation différentielle

$$\gamma'(t) + \frac{Rf+k^2}{JR}\gamma(t) = \frac{k}{JR}u(t) \qquad (E)$$

et la condition initiale :$\gamma(0) = 0$

Données numériques : $R = 2\Omega$, $J = 10^{-3}kg.m^2$,$f = 4 \times 10^{-5}N.m.rad^{-1}.s$, $k = 4 \times 10^{-2}V.rad^{-1}.s$.
Répondre alors aux questions suivantes :

1. Quelle équation différentielle doit-vérifier $\gamma(t)$? Q1
2. Résoudre l'équation homogène. Q2
3. On alimente le moteur avec une tension constante $u(t) = 4,2$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Q3

   (a) Déterminer une solution particulière constante de (E).
   (b) Donner la forme générale des solutions de (E).
   (c) Conjecturer alors l'écriture de la fonction γ solution de (E) et vérifiant la condition initiale. On expliquera la méthode utilisée.

Appeler le professeur pour présenter vos résultats .

Soit alors γ, définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\gamma(t) = 100(1 - e^{-0,84t})$$

4. On appelle temps de réponse à 5% le nombre t_5 défini par :

$$\gamma(t_5) = \frac{95}{100} \times \lim_{t \to +\infty} \gamma(t)$$

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de t_5. Q4

(a) en utilisant un logiciel.(On expliquera la démarche utilisée.)

(b) par le calcul.

(c) Interpréter ce résultat.

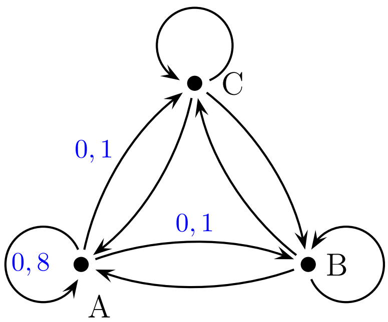
Exercice 2

L'objet de cet exercice est d'étudier le déplacement d'un internaute entre 3 sites.
A l'issue de sa requête, un internaute est susceptible d'aller sur trois sites A, B, C.

— le site A contient 8 liens vers lui-même, un lien vers B et un lien vers C .
— le site B comporte 7 liens vers lui-même, deux vers A et un vers C.
— le site C comporte 3 liens vers A, un lien vers B et 6 vers C.

Au départ l'internaute choisit au hasard l'un des trois sites.
Par la suite la probabilité de passer d'un site (à l'instant n) vers un autre (à l'instant n+1) est proportionnelle au nombre de liens au premier site vers le deuxième.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités pour que, à l'instant n, l'internaute soit respectivement sur A, B et C.

1. Recopier et compléter le graphe représentant la situation. Q5



2. Exprimer a_{n+1}, respectivement b_{n+1} et c_{n+1}, en fonction des trois réels a_n ; b_n et c_n. Q6
3. On pose $U_n = (a_n, b_n, c_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.Déterminer la matrice M tel que :

$$U_{n+1} = U_n \times M$$

Q7

Appeler le professeur pour présenter vos résultats .

4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer D^2, D^3 puis D^4. Conjecturer une écriture de D^n pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) On suppose que P est inversible. Calculer P^{-1}.

(c) Calculer alors la matrice PDP^{-1}. Que remarque-t-on ?

Q8

On admettra dans la suite que : $M^n = PD^nP^{-1}$.

5. On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} D^n$ est la matrice obtenue en faisant tendre tous les coefficients de D^n vers $+\infty$. Q9

   (a) Conjecturer la limite de la matrice D^n lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) Conjecturer la limite de M^n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Après de très nombreux clics,sur quel site se retrouvera un internaute qui aura cliqué en premier sur le site 1 ? Argumenter. Q10