Fonctions et valeurs approchées

1. Dire pourquoi $\dfrac{13{,}8}{7+4\sqrt{3}}$ et $13{,}8\left(7-4\sqrt{3}\right)$ sont deux écritures d'un même nombre.

2. Lors d'une séance de calcul mental, un professeur demande à ses élèves de remplacer $\sqrt{3}$ par 1,7 dans le calcul de $A=\dfrac{13{,}8}{7+4\sqrt{3}}$ et $B=13{,}8\left(7-4\sqrt{3}\right)$. Qu'obtient-on ?

> Appeler le professeur pour la vérification de ces résultats

L'objet de cet exercice est de déterminer celui des deux résultats obtenus précédemment qui est le plus proche de la valeur exacte. Pour cela, on introduit les fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle [1,7 ; 1,8] par $f(x)=\dfrac{13{,}8}{7+4x}$ et $g(x)=13{,}8(7-4x)$ et on étudie les valeurs prises par $f(x)$ et $g(x)$ pour des valeurs « proches » de $\sqrt{3}$.

3. *a.* Tracer les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions *f* et *g* à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

   b. Lire sur ce graphique les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g. Quel est le résultat obtenu par le calcul ?

   c. Comment interpréter les résultats obtenus par calcul mental ? Quelle est la meilleure des deux approximations ?

> Appeler le professeur pour lui soumettre le graphique et les résultats obtenus

4. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle [1,7 ; 1,8] par $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}$. Tracer la courbe représentative C_h de la fonction *h*. Quelles sont les positions relatives des courbes C_f , C_g et C_h ?

Quelle erreur commet-on en prenant $h(1{,}7)$ pour valeur approchée de *A* (ou *B*) ?

Démontrer que pour tout *x* de l'intervalle [1,7 ; 1,8], $h(x)=\dfrac{69(25-8x^2)}{5(4x+7)}$

Jeu de dé

Un jeu de hasard consiste à lancer deux dés cubiques bien équilibrés, un rouge et un noir. La mise est de 1 euro.

- ✓ Si la somme des points est supérieure ou égale à 9, le joueur reçoit 3 euros ;
- ✓ si la somme des points est inférieure ou égale à 4, le joueur récupère sa mise ;
- ✓ Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.

On cherche à savoir quel est le gain algébrique moyen (différence entre la somme gagnée et la mise initiale).

1. a) Simuler une partie à l'aide d'un logiciel.

   b) Simuler 1 000 parties de ce jeu et calculer la fréquence d'obtention des différentes sommes possibles.

   c) Estimer alors le gain moyen du joueur. Le jeu vous semble-t-il équitable ?

> Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

2. a) Soit k un entier compris entre 2 et 12. Dénombrer toutes les façons d'obtenir une somme égale à k.

On pourra réaliser un tableau à double entrée tel que ci-dessous :

Dé rouge

Dé noir	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				7		
4						
5						
6						

   b) En déduire alors le gain moyen du joueur.

Académie de Versailles | **Mathématiques « outillées »** | **Année scolaire 2012-2013**

Sujet numéro 13-09 | **Seconde**

Optimisation d'une recette

Un commerçant vend un article au prix de 80€. Il vend 1 200 articles de cette sorte par semaine. Une enquête auprès de ses clients estime qu'il vendrait 50 articles de plus par semaine chaque fois que le prix baisserait de 2€ mais qu'il vendrait 50 articles de moins par semaine chaque fois que le prix augmenterait de 2€.

1. Réaliser une feuille de calcul qui donne, en fonction du nombre de fois que le commerçant augmente ou baisse le prix de l'article de 2€, le prix unitaire et le nombre d'articles vendus.

> Appeler le professeur pour vérification de la feuille de calcul

2. Compléter la feuille de calcul pour donner la recette maximale hebdomadaire du commerçant ainsi que le prix unitaire correspondant de l'article.

> Appeler le professeur pour lui communiquer les réponses

3. À tout entier positif n, on associe la variation $-2n$ du prix de l'article et la variation $50n$ du nombre d'articles vendus en une semaine. Par abus de langage, ces notations sont conservées pour un entier négatif (une baisse négative est une hausse).

   a) Quelles sont la plus grande et plus petite valeur de n possibles ?

   b) On appelle $R(n)$ la recette, en euros, réalisée par la vente des objets une fois que le prix unitaire a été augmenté ou baissé n fois de 2€. Justifier que : $R(n) = (1200 + 50n) \times (80 - 2n)$.

   c) Montrer que $R(n)$ peut aussi s'écrire sous la forme $102400 - 100(n-8)^2$. Retrouver alors les réponses obtenues à la question 2).

Milieux des cordes d'une hyperbole

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot$ Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. On considère des réels positifs a et b et les points A et B de la courbe C d'abscisses respectives a et b.

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel.
2. Dans le cas particulier où $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=2$, on considère les points d'intersection M et N de la droite (AB) avec les axes du repère. Faire apparaître sur la figure les milieux des segments [AB] et [MN]. Justifier le résultat observé.

> Appeler le professeur pour vérification

3. On se place dans le cas général. Faire apparaître sur la figure les points M et N, points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère. Le milieu de [MN] semble-t-il coïncider avec celui de [AB] ?
4. Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB], puis une équation de la droite (AB), les coordonnées de M et N, et enfin les coordonnées du milieu de [MN].

> Appeler le professeur pour lui communiquer ces résultats

5. Dans cette partie, $a=1$. Observer les déplacements du milieu I de [AB] lorsque b varie.

Montrer de le point I appartient à la représentation graphique de la fonction m définie sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$m(x)=\dfrac{x}{2x-1}\cdot$

Académie de Versailles | **Mathématiques « outillées »** | **Année scolaire 2012-2013**

Sujet numéro 13-14 | **Collège, seconde**

Sommes de deux carrés d'entiers

On a utilisé une feuille de calcul pour y faire apparaître les nombres n pour lesquels il existe des entiers a et b non nuls inférieurs ou égaux à 10 tels que $n = a^2 + b^2$. Voici une partie de la feuille obtenue :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2	8	18	32	50	72	98	128	162	200
	5	13	25						
		10	20						
			17						
					37	53	73	97	125
						50			
								82	104
									101

1. Reproduire et compléter cette feuille sur écran (en utilisant si possible les fonctionnalités du logiciel utilisé).

2. Le plus grand nombre « somme de deux carrés d'entiers » figurant dans ce tableau est 200. Donner des exemples de nombres inférieurs à 200 et sommes de deux carrés d'entiers qui ne figurent pas dans la feuille de calcul. La feuille donnant toutes les sommes de carrés d'entiers non nuls inférieurs ou égaux à 14 les contient-elle tous ?

Appeler le professeur pour vérification

3. Y a-t-il des nombres figurant deux fois dans cette nouvelle feuille ? Écrire les décompositions de chacun des nombres trouvés en sommes de deux carrés.

4. En prolongeant un peu la recherche, trouver un nombre s'écrivant de trois manières différentes comme somme des carrés de deux entiers non nuls, et écrire les trois décompositions de ce nombre.

Appeler le professeur pour lui communiquer ces résultats

5. Diophante, Brahmagupta, Euler et Lagrange, notamment, ont utilisé la propriété :

Pour tous entiers a, b, c et d : $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$

Établir cette propriété. Montrer qu'une de ses conséquences est que le produit de deux sommes de deux carrés est un carré ou une somme de deux carrés. Est-il vrai que le produit de deux sommes de deux carrés soit de deux manières une somme de deux carrés ?

Étude de la rentabilité d'une loterie

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires indiscernables au toucher. Un joueur mise 2€. Il tire alors au hasard une boule dans l'urne. S'il tire une boule blanche, il gagne 3€, sinon il perd sa mise.
On cherche à estimer le gain moyen de l'organisateur sur un grand nombre de parties.

1. Réaliser 2000 simulations de ce jeu, à l'aide d'un tableur ou en écrivant un algorithme mis en œuvre sur un logiciel adapté, et compter le nombre de boules blanches tirées.

> Appeler le professeur pour qu'il vérifie ces simulations.

2. Quelle semble être la valeur du gain moyen de l'organisateur sur un grand nombre de parties ?

> Appeler l'examinateur pour lui faire part de votre conjecture.

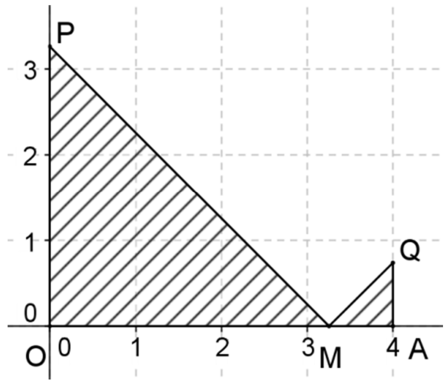
3. On appelle G la fonction qui, à chaque fois qu'un joueur tire une boule, donne le gain, positif ou négatif, du joueur.

   a) Quelles sont les valeurs prises par la fonction G ?

   b) Quelle est la probabilité que G prenne chacune de ces valeurs ?

   c) Si le nombre de parties est suffisamment grand, on peut considérer que les fréquences de sortie d'une boule blanche ou d'une boule noire sont très proches des probabilités des événements « la boule est blanche » et « la boule est noire ». Quel calcul peut permettre d'estimer le gain moyen de l'organisateur sur un grand nombre de parties ? Retrouve-t-on la valeur conjecturée ?

Variations sur des aires



Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Soit A le point de coordonnées (4, 0). Soit x un nombre situé dans l'intervalle [0, 4] et M le point de [OA] d'abscisse x.

On construit les points P et Q comme sur la figure ci-contre, de façon que les triangles MOP et MAQ soient rectangles isocèles respectivement en O et A.

1. *a.* Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

b. Afficher l'aire du domaine hachuré.

2. On désigne par $A(x)$ l'aire du domaine hachuré et par N le point de coordonnées (x, $A(x)$).

a. Tracer la courbe décrite par N lorsque M parcourt le segment [OA].

b. La courbe présente un axe de symétrie. Exploiter la situation géométrique pour justifier cette symétrie axiale et donner une équation de cet axe.

> Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

3. *a.* Démontrer que, pour tout x compris entre 0 et 4, $A(x) = x^2 - 4x + 8$.

b. Soit h un réel compris entre 0 et 2. Démontrer que $A(2-h) = A(2+h)$. Quelle propriété de la courbe, cette égalité traduit-elle ?

D'une fonction à une autre

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; i, j)$.

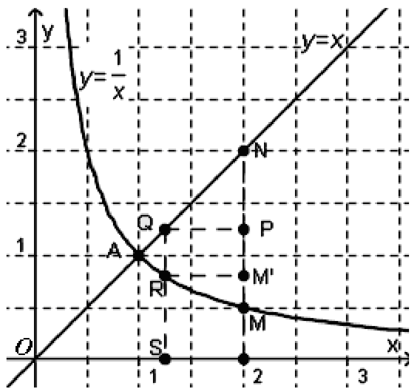
1. *a.* À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter la droite Δ d'équation $y = x$ ainsi que la courbe C_f de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

b. Soit M un point de la courbe C_f. On construit successivement les points N et P tels que :

- N est le point de Δ qui a même abscisse que M ;
- P est le milieu de [MN].

Construire ensuite, dans cet ordre, les points Q, R, S et M' tels que :

- Q est le point de Δ qui a même ordonnée que P ;
- R et S ont même abscisse que Q et appartiennent respectivement à C_f et. à l'axe des abscisses ;
- M' a même ordonnée que R et même abscisse que M.



c. Quelles sont les coordonnées des points N, P, Q, R, S et M' lorsque M a pour abscisse 2 ?

d. Tracer le lieu de P et celui de M' lorsque M décrit la courbe C_f.

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

2. Soit a un réel quelconque, strictement positif et soit M le point de C_f d'abscisse a.

a. Exprimer les coordonnées des points M et N en fonction de a. En déduire que P appartient à la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2+1}{2x}\cdot$ Tous les points d'abscisse positive de cette courbe sont-ils atteints ?

b. Déterminer les coordonnées de Q, R et S. En déduire comme ci-dessus une équation de la courbe décrite par M'. Contrôler ce résultat en utilisant les fonctionnalités du logiciel.

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

Réflexion dans un triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en B. On désigne par O le milieu de son hypoténuse et par E le symétrique de A par rapport à la droite (BO).

1. *a.* Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   b. Faire varier la longueur AB et afficher le quotient $\frac{\text{AB}}{\text{BC}}$.

   Appeler le professeur pour une vérification de la figure

   c. Placer A de telle sorte que E appartienne à la médiatrice de [BC]. Donner une valeur approchée de $\frac{\text{AB}}{\text{BC}}$ lorsque EB = EC.

2. Quelle particularité des triangles AOB et BOE les mesures faites par le logiciel font-elles apparaître ?

   Appeler le professeur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle

3. Démontrer le résultat observé à la question 2 puis calculer la valeur exacte du quotient $\frac{\text{AB}}{\text{BC}}$ lorsque EB = EC.