ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades de mathématiques

Concours par équipes

Élèves de troisième et seconde

Mardi 28 mars 2023

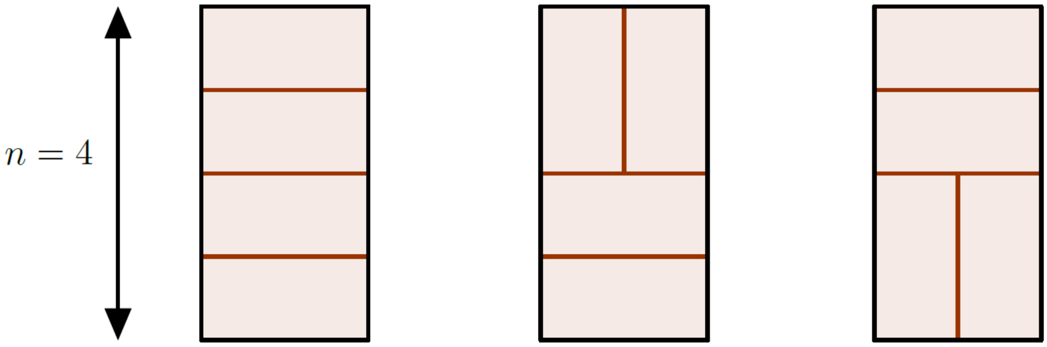
Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les trois exercices sont à traiter. Chaque équipe remet une copie rédigée collectivement. Les équipes peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels elles sont parvenues. On n'écrit pas sur le sujet.

Exercice 1 : Tuiles dans un rectangle

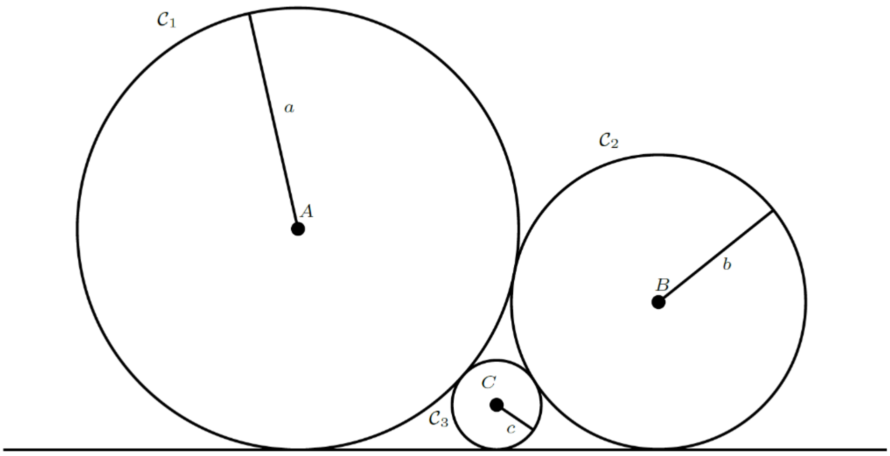
Julie joue à un jeu qui consiste à organiser des tuiles de largeur 1 et de longueur 2, dans un rectangle de dimensions 2 et n où n est un entier naturel non nul. Elle appelle A_n le nombre de façons différentes dont elle peut organiser ces tuiles de sorte que la totalité du rectangle de dimensions 2 et n soit recouverte par les tuiles sans que ces dernières ne se chevauchent. Julie donne, par exemple, quelques manières d'organiser les tuiles si $n = 4$.



1. Déterminer A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.
2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer A_{n+2} (le nombre de façons d'organiser les tuiles dans un rectangle de dimensions 2 et $n+2$) en fonction de A_{n+1} (le nombre de façons d'organiser les tuiles dans un rectangle de dimensions 2 et $n+1$) et de A_n (le nombre de façons d'organiser les tuiles dans un rectangle de dimensions 2 et n).
3. Quel est le nombre de façons différentes dont Julie peut organiser les tuiles de sorte que la totalité du rectangle de largeur 2 et de longueur 12 soit recouverte par les tuiles sans que ces dernières ne se chevauchent ?

Exercice 2 : Trois petits cercles

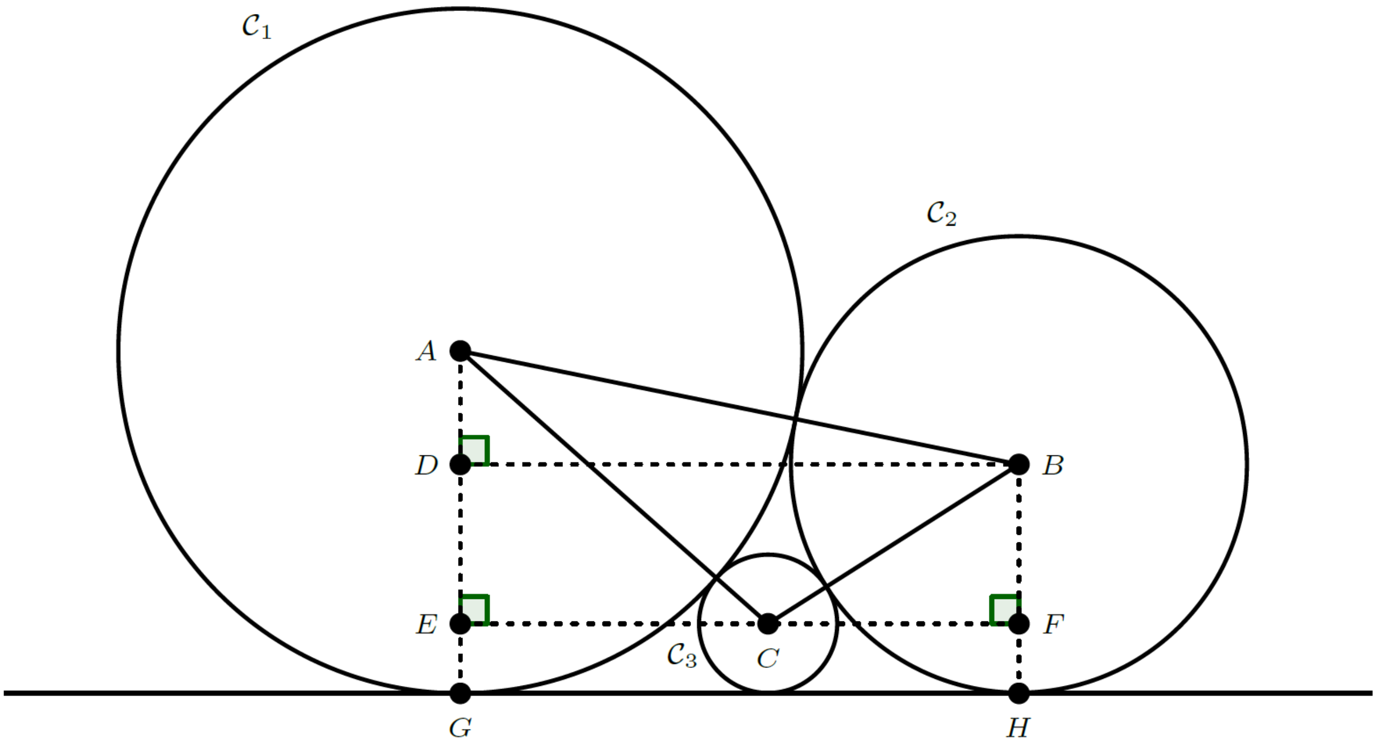
Soit a, b et c trois nombres tels que $a \geq b > c > 0$. On considère une œuvre d'art constituée de trois cercles C_1 , C_2 et C_3 de centres respectifs A, B et C, de rayons respectifs a, b et c. On suppose que les cercles C_1 , C_2 et C_3 sont tous les trois en contact avec le sol et en contact les uns avec les autres, comme sur le schéma ci-dessous.



L'artiste en charge de la sculpture voudrait pouvoir déterminer le rayon du cercle C_3 une fois que les rayons des cercles C_1 et C_2 ont été fixés.
Pour répondre à cette question, on munit le schéma précédent d'informations supplémentaires.
Sur le schéma suivant :

- G est le point du cercle C_1 en contact avec le sol, H est le point du cercle C_2 en contact avec le sol ;
- D est le point d'intersection du segment $[AG]$ et de la droite perpendiculaire à (AG) passant par B ;
- E est le point d'intersection du segment $[AG]$ et de la droite perpendiculaire à (AG) passant par C ;
- F est le point d'intersection du segment $[BH]$ et de la droite perpendiculaire à (BH) passant par C.

Le triangle ABD est donc rectangle en D, le triangle ACE est donc rectangle en E et le triangle BCF est donc rectangle en F.



On rappelle que pour tous nombres x et y positifs ou nuls on a la relation suivante :

$$\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

1. Exprimer les longueurs AB, BC, AC, AD, AE et BF en fonction de a, b et c.
2. En déduire une expression de EC et de CF en fonction de a, b et c.
3. En utilisant le triangle ABD, montrer que :

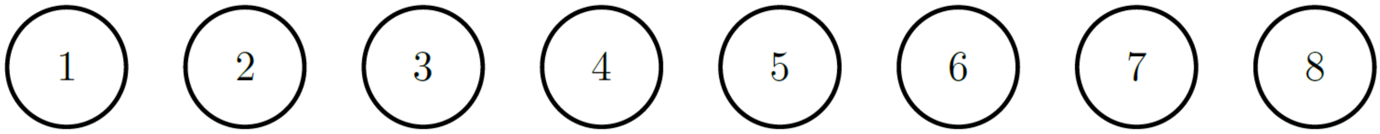
$$c = \frac{ab}{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

4. L'artiste voudrait que le cercle C_1 soit de rayon 3 mètres et le cercle C_2 soit de rayon 2 mètres. Quel doit être le rayon, au centimètre près, du cercle C_3 ?

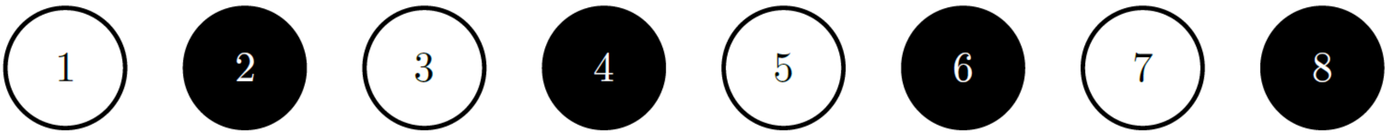
Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 : Pièces blanches et noires

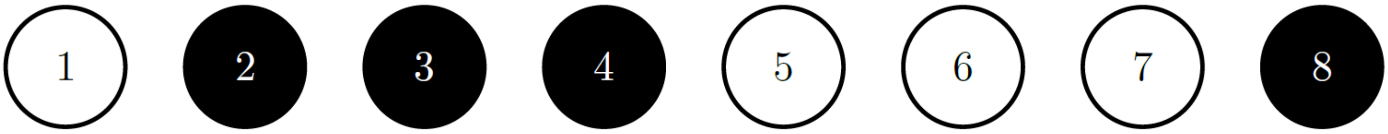
On dispose sur une table cent pièces comportant une face blanche et une face noire. Sur chaque pièce, on écrit un entier naturel, de 1 à 100 (le même entier est inscrit sur la face blanche et la face noire de la pièce). Les pièces sont alors disposées dans l'ordre des nombres inscrits sur leurs faces, face blanche vers le haut. On représente ci-dessous les 8 premières pièces au début de notre expérience.



Étape 1 :
On parcourt ensuite toutes les pièces. Si le nombre inscrit sur la pièce est un multiple de 2, alors on retourne la pièce. Sinon, on ne touche pas à la pièce. Après le premier passage, les 8 premières pièces sont donc dans la configuration suivante :



Étape 2 :
On parcourt une deuxième fois toutes les pièces. Si le nombre inscrit sur la pièce est un multiple de 3, alors on retourne la pièce. Sinon, on ne touche pas à la pièce. Après ce deuxième passage, les 8 premières pièces sont donc dans la configuration suivante :



Étapes suivantes :
On continue en parcourant toutes les pièces et en retournant celles qui portent un numéro qui est un multiple de 4, puis on recommence le parcours en retournant celles qui portent un numéro qui est un multiple de 5, et ainsi de suite jusqu'à retourner toutes les pièces qui portent un numéro qui est un multiple de 100.

1. Représenter la configuration des dix premières pièces après le dernier passage.
2. Si une pièce porte un numéro qui est un nombre premier, quelle est la couleur de la face visible de cette pièce après le dernier passage ?
3. Quelle est la couleur de la face visible de la pièce portant le numéro 12 après le dernier passage ? Le numéro 25 ? Le numéro 72 ? Le numéro 81 ?
4. Quelles sont les pièces qui ont la face blanche vers le haut après le dernier passage ?