MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

# Olympiades nationales de mathématiques 2018

## Amériques - Antilles - Guyane

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

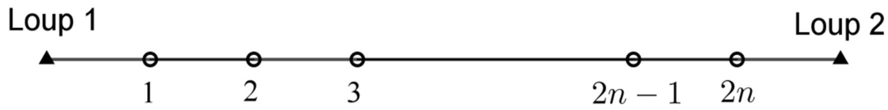
**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

# Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*La raison du plus fort*) et 2 (*Dés magiques*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*La raison du plus fort*) et 3 (*Opération triangle*).

## Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

***La raison du plus fort…***




Deux loups, immobiles, sont placés aux extrémités d'un chemin rectiligne fréquenté par des agneaux. À chaque étape, un agneau double la distance qui le sépare du loup le plus proche, quitte à se rapprocher éventuellement de l'autre loup. On suppose que le chemin a une longueur entière $2n+1$ et que, sur ce chemin, les agneaux ne peuvent se trouver qu'aux points d'abscisses entières comprises entre 1 et $2n$. Par exemple, pour $n=2$, on a un chemin de longueur 5, et si l'agneau se trouve en 3, il passe en 1, puis en 2, puis en 4 et revient en 3.

**Déplacement d'un agneau**

On suppose dans cette partie que le chemin est de longueur 9 ($n=4$).

**1.** ***a.*** L'agneau se trouve initialement en position 4. Quelles sont toutes les positions qu'il peut atteindre ?

***b.*** Et s'il part de la position 3 ?

***c.*** Est-il vrai, quand $n=4$, que l'agneau retrouve un jour sa position initiale quel que soit son point de départ ?

**Un agneau en orbite**

On appelle orbite d'un entier $k$ compris entre 1 et $2n$ l'ensemble des positions possibles pour un agneau se trouvant initialement en position $k$.

**2.** On suppose dans cette question que $n=5$.

***a.*** Quelle est l'orbite de 2 ?

***b.*** En déduire les orbites des entiers compris entre 1 et 10.

**3.** On suppose dans cette question que $n=7$.

Combien y a-t-il d'orbites distinctes dans ce cas ?

*On se replace désormais dans le cas général.*

**4.** Au cours de ses déplacements, un agneau se trouve en position $k$. Quelle était sa position précédente ?

**5.** Montrer que, pour tout $n$ et tout $k$, où $1 \leq k \leq 2n$, quand un agneau part de la position $k$, il retrouvera à nouveau cette position dans son périple.

**6.** Pour $n$ fixé, et $k$ donné, où $1 \leq k \leq 2n$, on souhaite déterminer le nombre de positions possibles distinctes qu'occupera l'agneau. On propose le squelette d'algorithme suivant :

```
nb ← 0
positionCourante ← k
Tant Que ((positionCourante ≠ k) ou (nb = 0))  Faire
        […]
        nb ← nb + 1
Fin Tant Que
Afficher nb
```

***a.*** Que se passe-t-il si on enlève la condition nb = 0 dans le Tant Que ?

***b.*** Compléter cet algorithme (à recopier sur la feuille de composition) pour qu'il affiche le nombre de positions possibles distinctes.

**Et à plusieurs ? Moutons de Panurge…**

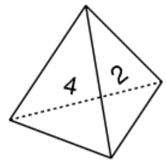
On suppose maintenant que $2n$ agneaux occupent exactement tous les points d'abscisse entière du chemin. Ils effectuent simultanément les déplacements décrits au début du problème.

**7.** Est-il vrai qu'après un certain nombre de déplacements on retrouvera la configuration de départ, chacun étant à sa place initiale ?

## Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

### *Dés magiques*

On lance deux dés $D_a$ et $D_b$ successivement et indépendamment ; on considère le total de points ainsi ramené et sa probabilité d'apparition. Par exemple, avec deux dés standards à six faces, si le premier jet fournit le 1, et le second le 1 aussi, le total vaudra 1+1=2, et sa probabilité d'apparition $\frac{1}{12}$. L'étude statistique de ces sommes peut intervenir dans certains jeux de hasard, le jeu de l'Oie par exemple.
Jusqu'en question **6**, les dés envisagés sont tétraédriques, comme dans le croquis ci-contre. En questions **1** et **2**, leurs quatre faces sont standards, numérotées 1, 2, 3, 4.




**1.** Donner les trois manières d'obtenir pour total 6, en déduire que la probabilité d'obtenir un total de 6 est $\frac{3}{16}$.
**2.** Donner les différents totaux que l'on peut ainsi atteindre, puis leurs probabilités d'apparition. Qu'indiquent les coefficients de l'expression polynomiale $P(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2$ une fois développée ? Expliquer.

Pour plus d'originalité, on prend maintenant des dés non standards : un dé $D_1$ aux faces numérotées 1, 1, 2, 5 et un dé $D_2$ aux faces numérotées 1, 4, 4, 4.

**3.** Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 6 ?

De manière générale, le dé $D_a$ a quatre faces dont les valeurs $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ et sont stockées dans un tableau $t_a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4]$. De même, le dé $D_b$ a quatre faces $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ vérifiant $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ et stockées dans le tableau $t_b = [b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4]$. On définit les quantités polynomiales $A(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3} + x^{a_4}$ et $B(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + x^{b_3} + x^{b_4}$. Par exemple, les dés de la question **3** donnent lieu à $t_a = [1,\ 1,\ 2,\ 5]$, $t_b = [1,\ 4,\ 4,\ 4]$, $A(x) = 2x + x^2 + x^5$ et $B(x) = x + 3x^4$.

**4.** Déterminer $t_a$, $t_b$, $A(x)$, $B(x)$ attachés aux dés $D_a$ et $D_b$ de faces 1, 2, 2, 3 et 1, 3, 3, 5.
**5.** L'algorithme suivant (qu'il serait possible d'étendre à de grands dés) renvoie le coefficient de $x^k$ dans le produit $x^p\left(x^{b_1} + x^{b_2} + x^{b_3} + x^{b_4}\right)$.
Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie le coefficient de $x^k$ dans le produit $A(x)B(x)$ de deux dés à $n$ faces.

```
Coef←0
Pour j allant de 1 à 4
        Si p + t_b[j] = k alors
                Coef←Coef+1
        Fin Si
Fin Pour
Renvoyer Coef
```

Le colonel George Sicherman (États-Unis, XXe siècle) rechercha des couples de dés non-standards $D_a$ et $D_b$ dont les sommes des faces obéissent aux mêmes lois de probabilité que celles de deux dés standards. Voici comment il a pu procéder, d'abord sur des dés à quatre faces.

**6.** On reprend les notations $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ ; $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ et $P(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2$.
***a.*** Justifier que $A(x).B(x) = P(x)$.
***b.*** Factoriser $x + x^2 + x^3 + x^4$ en ne faisant apparaître que des quantités de degrés 1 et 2.
***c.*** Que valent $A(0)$, $A(1)$, $B(0)$, $B(1)$ ?
***d.*** Proposer dès lors une répartition possible et viable des facteurs de $P$ entre $A$ et $B$, définissant un bon couple de dés non standards.
**7.** Déterminer un couple de dés non standards à 6 faces dont la somme des faces obéit à la même loi de probabilité que celle de deux dés standards (aux faces : 1, 2, 3, 4, 5, 6).

## Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

***Opération triangle***

Pour tous entiers naturels $m$ et $n$, on appelle triangle de $m$ par $n$, et on note $m \Delta n$, le nombre défini par les règles suivantes, dont on admet qu'elles sont possibles :

- $0 \Delta n = n + 1$ ;
- $n \Delta 0 = (n - 1) \Delta 1$ dès que $n \neq 0$ ;
- $(n + 1) \Delta (m + 1) = n \Delta \left((n + 1) \Delta m\right)$.

Attention, $m \Delta n$ n'est pas nécessairement égal à $n \Delta m$.

**Quelques résultats**

**1.** ***a*** Montrer que $1\Delta 0 = 2$ et que $1\Delta 1 = 3$.
***b.*** Calculer $1\Delta 2$.
***c.*** Plus généralement, déterminer, pour tout entier naturel $n$, la valeur de $1\Delta n$. On pourra poser $u_n = 1\Delta n$ et vérifier que la suite $(u_n)$ est arithmétique.

**2.** ***a.*** Calculer $2\Delta 0$, $2\Delta 1$ et $2\Delta 2$.
***b.*** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $2\Delta n = 2n + 3$.

**3** ***a.*** Calculer $3\Delta 0$, $3\Delta 1$ et $3\Delta 2$.
***b.*** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $3\Delta n$ est égal à $2^{n+3} - 3$. On pourra poser $u_n = 3\Delta n$ et montrer que, pour tout $n$ supérieur ou égal à 1, $u_n = 2u_{n-1} + 3$.

**Illustration de $3\Delta n$**

Un artiste a illustré ainsi les valeurs de $3\Delta 0$ et $3\Delta 1$ :

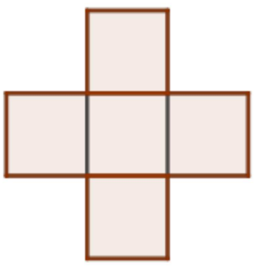


Figure 1

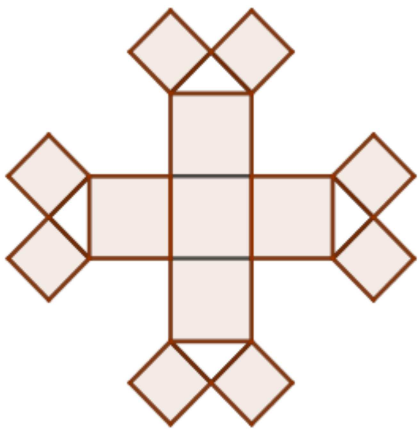


Figure 2

**4.** Tracer sur la copie une troisième figure qui viendrait logiquement compléter cette suite de dessins et illustrer la valeur de $3\Delta 2$.
**5**. Supposons que le côté d'un carré de la figure 1 mesure 1 cm.
***a.*** Déterminer l'aire respective des figures 1 et 2.
***b.*** Quelle serait l'aire de la figure illustrant $3\Delta n$ ? On ne tiendra pas compte des recouvrements éventuels.