MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Exercices académiques

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 5.

Les autres candidats (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques ou candidats de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 6.

Exercice 4 (à traiter par tous les candidats)

« Le classement est le fil d'Ariane dans le dédale de la nature. »

(*André Maurois*)

Ariane se propose de classer tous les nombres entiers de trois chiffres dont l'écriture décimale n'utilise que les chiffres 1, 2 ou 3.

On dira que deux tels nombres sont **ennemis** s'ils n'ont aucun chiffre en commun au même rang, donc pas le même chiffre des unités, ni le même chiffre des dizaines, ni le même chiffre des centaines.

Par exemple :

- 123 et 231 sont deux nombres ennemis ;
- 123 et 321, qui ont le même chiffre des dizaines, ne sont pas ennemis.

Elle se propose de les répartir en trois catégories, C1, C2 et C3, en respectant les contraintes suivantes :

- chaque nombre doit appartenir à une catégorie et une seule ;
- les nombres 111, 222 et 333 sont classés respectivement dans les catégories C1, C2 et C3 ;
- le nombre 321 est classé dans la catégorie C1 ;
- deux nombres ennemis ne peuvent être classés dans la même catégorie.

1. On imagine tout d'abord qu'un tel classement est possible.

a. Dans quelles catégories Ariane doit-elle ranger les nombres 112 et 113 ?

b. En déduire les catégories dans lesquelles Ariane doit classer les nombres 323 et 331.

c. Dans quelles catégories Ariane doit-elle classer les nombres dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 1 ?

d. Ariane veut maintenant classer le nombre $u = 131$.

Donner deux ennemis du nombre u qui sont dans des catégories différentes. En déduire où classer le nombre u.

Dans quelle catégorie Ariane doit-elle classer les nombres dont le chiffre des unités est 1 ?

e. Où ranger le nombre 123 ?

Et les nombres comprenant le chiffre 1 dans leur écriture décimale (et qui n'ont pas encore été classés) ?

2. Déduire des résultats de la question **1.** qu'un tel classement est possible.

3. Ariane décide maintenant de classer tous les entiers compris entre 111 111 111 et 999 999 999 dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 0 dans 9 catégories notées C1, C2, ..., C9.

On dira que deux tels nombres sont ennemis s'ils n'ont aucun chiffre en commun au même rang, donc pas le même chiffre des unités, des dizaines, des centaines, des milliers etc.

Les contraintes sont analogues à celles définies dans le préambule :

- les nombres 111 111 111, 222 222 222, ..., 999 999 999 sont classés respectivement dans les catégories C1, C2, ..., C9 ;
- deux nombres ennemis ne peuvent pas être classés dans la même catégorie ;
- le nombre 987 654 321 est classé dans la catégorie C1.

a. Montrer qu'un tel classement est possible et donner le nombre d'entiers rangés dans chacune des catégories.

b. Ce classement est-il unique ?

Exercice 5 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)
Alex joue en ligne (avec des jeux gratuits).

Le jeu auquel Alex joue propose plusieurs niveaux. Pour en avoir terminé avec un certain niveau, il faut découvrir le rôle d'une fonction inconnue, nommée $\boldsymbol{magic}$. Cette fonction associe à chaque entier naturel non nul un entier naturel. Elle est croissante sur l'ensemble des entiers naturels et, pour tout entier naturel non nul a, on sait que $\boldsymbol{magic}(a) > a$.

Alex doit déterminer le nombre $\boldsymbol{magic}\ (2\,024)$.

Pour cela, Alex dispose d'une fonction $\boldsymbol{aide}$, qui doit lui permettre de déterminer $\boldsymbol{magic}(n)$, et qui est définie par l'algorithme suivant :

Saisir n
Affecter à la variable x la valeur $\boldsymbol{magic}(n)$
Affecter à la variable y la valeur de $\boldsymbol{magic}(x)$

Afficher la valeur de y

On peut programmer cet algorithme avec le programme Python ci-contre :

```
def aide(n) :
    x = magic(n)
    y = magic(x)
    return y
```

Le tableau ci-dessous donne quelques-uns des résultats obtenus par Alex :

Valeurs de n	1	2	10	15
Résultats retournés pour $\boldsymbol{aide}(n)$	3	6	30	45

Alex, remarquant que la fonction $\boldsymbol{aide}$ semble retourner le triple du nombre entré, vérifie alors, à l'aide d'un programme, que pour tout entier n compris entre 1 et 10 000, on a $\boldsymbol{aide}(n) = 3n$.

Alex pose tout d'abord $\boldsymbol{magic}(1) = m$.

1. Expliquer comment Alex :
   - ***a.*** détermine la valeur de $\boldsymbol{magic}(m)$;
   - ***b.*** prouve que $1 < m < 3$;
   - ***c.*** trouve successivement les valeurs de m, de $\boldsymbol{magic}(2)$, de $\boldsymbol{magic}(3)$ et de $\boldsymbol{magic}(6)$.
2. ***a.*** Montrer que la fonction $\boldsymbol{magic}$ est **strictement** croissante sur l'ensemble des entiers naturels allant de 1 à 10 000.
   - ***b.*** Quelles valeurs Alex peut alors en déduire pour $\boldsymbol{magic}(4)$ et $\boldsymbol{magic}(5)$?
3. Dans le tableau ci-contre, la flèche représente la fonction $\boldsymbol{magic}$. Comme Alex, compléter les 9 lignes de ce tableau.

Par exemple, la première ligne sera complétée par les valeurs trouvées ci-dessus pour $\boldsymbol{magic}(1)$ *et* $\boldsymbol{magic}(m)$.

1 → … → …
2 → … → …
3 → … → …
…
9 → … → …

Compléter également celui-ci :

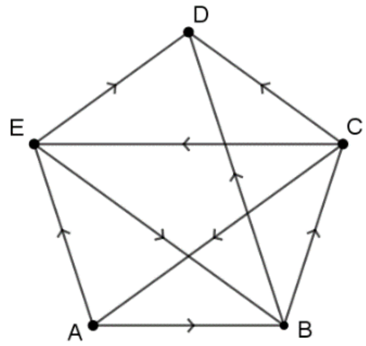
10 → … → …
11 → … → …
12 → … → …
…
18 → … → …

4. Expliquer ce qui permet à Alex d'affirmer que $\boldsymbol{magic}(2 \times 3^6) = 3^7$ et $\boldsymbol{magic}(3^7) = 2 \times 3^7$.
5. En poursuivant son raisonnement, Alex a trouvé, elle peut passer au niveau supérieur !
   Mais que vaut donc $\boldsymbol{magic}(2024)$?

Exercice 6 (candidats de la voie générale ne suivant pas l'enseignement de « spé maths » et tous les candidats de la voie technologique)

Sur la route

Le schéma ci-contre représente un réseau routier reliant 5 villes notées A, B, C, D et E. Les routes de ce réseau **sont toutes à sens unique** (les flèches indiquent le sens de parcours) et on ne construit pas plus d'une route entre deux villes.



1. ***a.*** Est-il possible d'aller de la ville D à la ville B en passant par une seule autre ville (on dira « avec une seule étape ») ?

b. Suffirait-il de construire une nouvelle route pour que deux villes quelconques puissent être jointes avec au plus une seule étape ?

Dans la suite de l'exercice, on ne considère que des réseaux routiers reliant des villes avec des **routes à sens unique** et ne comportant pas plus d'une route entre deux villes.

2. Construire le schéma d'un réseau routier reliant 5 villes (que l'on pourra nommer A, B, C, D et E) de manière à pouvoir joindre deux villes quelconques en au plus une étape.

3. On conserve le réseau de la question **2.**, mais on souhaite l'étendre à deux nouvelles villes, P et Q, de façon à pouvoir joindre deux villes quelconques en au plus une étape.

a. On suppose qu'une route joint A à P. Comment relier P à A sans passer par B, C, D ou E ?

b. Comment compléter le réseau précédent pour y intégrer P et Q ?

4. Est-il possible de réaliser :

a. un réseau routier reliant 6 villes et permettant de joindre deux villes quelconques en au plus une étape ?

b. un réseau routier reliant 24 villes et permettant de joindre deux villes quelconques en au plus une étape ?

5. Est-il possible de réaliser un réseau routier reliant 4 villes et permettant de joindre deux villes quelconques en au plus une étape ?