Arithmétique

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul pair. Déterminer les entiers naturels non nuls a, b premiers entre eux et tels que $a + b$ divise $a^n + b^n$.

Comme n est pair et non nul, il existe un entier p non nul tel que $n = 2p$.
Or pour tous entiers naturels A, B et p, $A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \cdots + AB^{p-2} + B^{p-1})$
Donc si $A = a^2$ et $B = b^2$, l'égalité précédente donne :
$a^n - b^n = (a^2 - b^2)(a^{n-2} + a^{n-4}b^2 + \cdots + a^2b^{n-4} + b^{n-2})$
Or $a + b$ divise $a^2 - b^2$ donc $a + b$ divise $a^n - b^n$.
Comme $2a^n = (a^n - b^n) + (a^n + b^n)$, et, par hypothèse, $a + b$ divise $a^n + b^n$, $a + b$ divise $2a^n$.
De même, comme $2b^n = -(a^n - b^n) + (a^n + b^n)$, $a + b$ divise $2b^n$.
Or a et b sont premiers entre entre eux donc a^n et b^n le sont aussi et $pgcd(2a^n, 2b^n) = 2$.
On en déduit que $a + b$ divise 2. Comme a et b sont des entiers naturels non nuls, $a = b = 1$.

Exercice 2

Soit k un entier naturel impair.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, la somme $1 + 2 + \cdots + n$ divise la somme $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Le problème revient donc à montrer que $n(n + 1)$ divise $2(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$.
Or n et $n + 1$ sont premiers entre eux (car $(n + 1) - n = 1$ et d'après le théorème de Bezout).
On peut donc se ramener à montrer que n divise $2(1^k + 2^k + \cdots + n^{k)}$ et $n + 1$ divise $2(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$.
Pour tous entiers naturels distincts a, b et $k \geq 1$, $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$ donc $a - b$ divise $a^k - b^k$. En remplaçant b par $-b$, on déduit que $a + b$ divise $a^k - (-b)^k$.
Donc si k est impair, $a + b$ divise $a^k + b^k$.
Or, $2(1^k + 2^k + \cdots + n^k) = (1^k + (n-1)^k) + (2^k + (n-2)^k) + \cdots + ((n-1)^k + 1^k) + 2n^k$.
D'après ce qui précède, $n = 1 + (n - 1)$, donc n divise $1^k + (n - 1)^k$. De même $n = 2 + (n - 2)$ d'où n divise $(2^k + (n-2)^k)$, …, et n divise $2n^k$. On a donc bien n divise $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.
De même, $2(1^k + 2^k + \cdots + n^k) = (1^k + n^k) + (2^k + (n-1)^k) + \cdots + ((n-1)^k + 2^k) + (n^k + 1^k)$.
Un raisonnement analogue au précédent conduit à $n + 1$ divise $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.
Au final, $n(n + 1)$ divise $2(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$ soit $1 + 2 + \cdots + n$ divise $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Exercice 3

1. Déterminer tous les entiers naturels non nuls a et b tels que $a^4 + 4b^4$ soit un nombre premier.
2. Montrer qu'il y a une infinité d'entiers naturels non nuls a tels que, pour tout entier naturel non nul n, $c + n^4$ n'est pas un nombre premier.

1. $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$.
   Comme a et b sont des entiers naturels non nuls $a^2 + 2b^2 + 2ab \geq 5 > 1$ donc $a^4 + 4b^4$ est un nombre premier si, et seulement si, $a^2 + 2b^2 - 2ab = 1$ soit $(a - b)^2 + b^2 = 1$ soit $a - b = 1$ et $b = 0$ ou $a - b = 0$ et $b = 1$. Comme b est non nul, la seule solution est $a = b = 1$.
2. On pose $c = 4b^4$ où b est un entier strictement supérieur à 1. Alors, $n^4 + c = n^4 + 4b^4$ et, d'après la question précédente, $n^4 + c$ n'est pas un nombre premier.
   Ainsi, pour tout entier b strictement supérieur à 1, si $c = 4b^4$, pour tout entier naturel non nul n, $n^4 + c$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 4

Montrer que pour tous les entiers m et n tels que $m > n > 0$, on a $ppcm(m, n) + ppcm(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$.

Comme $m > n$, $m - n = k$ est un entier naturel non nul.
De plus, pour tous entiers naturels non nuls a et b, $ab = pgcd(a, b) \times ppcm(a, b)$.

Donc $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)=\frac{mn}{pgcd(m,n)}+\frac{(m+1)(n+1)}{pgcd(m+1,n+1)}$.
Or $(m+1)(n+1)>mn$ et $m=n+k$
donc $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)\geq mn\left(\frac{1}{pgcd(n+k,n)}+\frac{1}{pgcd(n+k+1,n+1)}\right)$.
D'autre part, $pgcd(n+k,n)=pgcd(k,n)$ car si un entier divise les entiers k et n, alors il divise $k+n$ et n et s'il divise $k+n$ et n alors il divise $k=k+n-n$ et n.
Donc, $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)\geq mn\left(\frac{1}{pgcd(k,n)}+\frac{1}{pgcd(k,n+1)}\right)$.
Or, pour tous réels x et y strictement positifs, $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (moyenne arithmétique et moyenne géométrique).
Donc, en posant $x=\frac{1}{a}$ et $y=\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$
donc $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)\geq 2mn\sqrt{\frac{1}{pgcd(k,n)\times pgcd(k,n+1)}}$
soit $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)\geq\frac{2mn}{\sqrt{pgcd(k,n)\times pgcd(k,n+1)}}$.
Or, $pgcd(k,n)$ et $pgcd(k,n+1)$ divisent k donc ces deux entiers n'ont pas de facteur commun car sinon n et $n+1$ auraient aussi un facteur commun. Donc $pgcd(k,n)\times pgcd(k,n+1)$ divise k.
En particulier, $0<pgcd(k,n)\times pgcd(k,n+1)\leq k$ donc $\frac{1}{\sqrt{pgcd(k,n)\times pgcd(k,n+1)}}\geq\frac{1}{\sqrt{k}}$
D'où $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)\geq\frac{2mn}{\sqrt{k}}$ soit $ppcm(m,n)+ppcm(m+1,n+1)\geq\frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$.

Exercice 5
Déterminer les nombres premiers p tels que p^2+11 possède exactement 6 diviseurs distincts dans **N**.

Si $p\neq 3$, il existe un entier k tel que $p=3k-1$ ou $p=3k+1$. Alors $(p-1)(p+1)=(3k-2)(3k)$ ou $(p-1)(p+1)=3k(3k+2)$ et dans les deux cas 3 divise p^2-1 donc 3 divise $p^2-1+12=p^2+11$.
Si $p\neq 2$, comme p est un nombre premier, p est impair donc il existe un entier k tel que $p=2k+1$. Alors $(p-1)(p+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$ et 4 divise p^2-1 donc 4 divise $p^2-1+12=p^2+11$.
Si $p\neq 3$ et $p\neq 2$, alors, comme 3 et 4 sont premiers entre eux, 12 divise p^2+11. Or 12 admet exactement 6 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 12. Comme $p>1$, $p^2+11>12$ et donc p^2+11 admet plus de 6 diviseurs.
Si $p=2$, $p^2+11=15$. Or 15 admet exactement 4 diviseurs : 1, 3, 5, 15.
Si $p=3$, $p^2+11=20$. Or 20 admet exactement 6 diviseurs : 1, 2, 4, 5, 10, 20.
La seule solution est donc 3.

Exercice 6
Soit p et q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que la moyenne arithmétique de tous les diviseurs de l'entier $n=p^aq^b$ est un nombre entier.

Les diviseurs de l'entier n sont les nombres qui s'écrivent p^cq^d où $0\leq c\leq a$ et $0\leq d\leq b$. La somme de tous ces diviseurs s'obtient en développant le produit : $(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)$.
Le nombre de diviseurs de p^aq^b est $(a+1)(b+1)$.
La moyenne cherchée est donc $M=\frac{(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)}{(a+1)(b+1)}$.
p et q sont deux nombres premiers distincts donc soit l'un des deux vaut 2 et l'autre est impair soit les deux sont impairs. Le problème étant symétrique en p et q. On ne considère donc que deux cas :

- Si $p=2$ et q est impair. Il existe un entier k tel que $q=2k+1$ et si on pose $b=q$ alors

$1+q+q^2+\cdots+q^b=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{2k}+q^{2k+1}$
Soit $1+q+q^2+\cdots+q^b=(1+q)+q^2(1+q)+\cdots+q^{2k}(1+q)=(1+q)(1+q^2+\cdots+q^{2k})$
Alors $M=(1+2+2^2+\cdots+2^a)\times\frac{(1+q)(1+q^2+\cdots+q^{2k})}{(1+b)(1+a)}$
Si on pose de plus $a=q^2+\cdots+q^{2k}$ alors $M=(1+2+2^2+\cdots+2^a)\times\frac{(1+q)(1+q^2+\cdots+q^{2k})}{(1+b)(1+a)}$
Soit $M=(1+2+2^2+\cdots+2^a)$ donc M est un entier.

- Si p et q sont tous les deux impairs il existe deux entiers k et l tels que $p=2k+1$ et $q=2l+1$.

Comme précédemment, sin on pose $a = p$ et $b = q$, alors
$1 + p + p^2 + \cdots + p^a = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{2k+1} = (1 + p)\left(1 + p^2 + \cdots + p^{2k}\right) = (1 + a)\left(1 + p^2 + \cdots + p^{2k}\right)$
$1 + q + q^2 + \cdots + q^b = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{2k+1} = (1 + q)\left(1 + q^2 + \cdots + q^{2k}\right) = (1 + b)\left(1 + q^2 + \cdots + q^{2k}\right)$
Donc $M = \left(1 + p^2 + \cdots + p^{2k}\right)\left(1 + q^2 + \cdots + q^{2k}\right)$ d'où M est un entier.

Exercice 7

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la somme S des carrés de deux entiers naturels m et n soit un multiple de 11.
2. Trouver un carré parfait de 4 chiffres qui, « retourné », donne aussi un carré parfait.

1. On remarque déjà que 11 étant un nombre premier, si 11 divise un carré parfait n^2, alors 11 divise n. (théorème de Gauss).
Si chacun des carrés de la somme est un multiple de 11, alors la somme est un multiple de 11.
Si la somme est un multiple de 11 et un des carrés est un multiple de 11, l'autre l'est aussi.
Si m et n ne sont pas divisibles par 11 et les restes r et r' de leur division euclidienne appartiennent à $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
Comme $(11q + r)^2 = 121q^2 + 22qr + r^2$, les carrés de m et n sont respectivement congrus à r^2et r'^2 modulo 11. On peut facilement vérifier que r^2et r'^2 sont eux-mêmes congrus à 1, 3, 4, 5 ou 9 modulo 11. En ajoutant deux quelconques de ces nombres, on ne peut obtenir 11 donc la somme S ne peut être un multiple de 11.
2. On montre déjà que la somme d'un entier ayant un nombre pair de chiffres et de son « retourné » est un multiple de 11. En effet, soit $N = 10^{2k+1}a_{2k+1} + 10^{2k}a_{2k} + \cdots + 10a_1 + a_0$ et $N' = 10^{2k+1}a_0 + 10^{2k}a_1 + \cdots + 10a_{2k} + a_{2k+1}$
alors $N + N' = \left(10^{2k+1} + 1\right)a_{2k+1} + \left(10^{2k} + 10\right)a_{2k} + \cdots + \left(10^k + 10^{k-1}\right)a_k + \cdots + \left(1 + 10^{2k+1}\right)a_0$
soit $N + N' = \left(10^{2k+1} + 1\right)a_{2k+1} + 10\left(10^{2k-1} + 1\right)a_{2k} + \cdots + 10^{k-1}(10 + 1)a_k + \cdots + \left(1 + 10^{2k+1}\right)a_0$.
Montrons par récurrence que pour tout entier n, $10^{2n+1} + 1$ est un multiple de 11.
Pour $n = 0$, $10^{2n+1} + 1 = 10 + 1 = 11$ qui est bien un multiple de 11.
Si pour un entier n, $10^{2n+1} + 1$ est un multiple de 11, alors il existe un entier p tel que $10^{2n+1} + 1 = 11p$ soit $10^{2n+1} = 11p - 1$
D'où $10^{2(n+1)+1} + 1 = 10^{(2n+1)+2} + 1 = 100(11p - 1) + 1 = 11 \times 100p - 100 + 1 = 11(100p - 9)$ et donc $10^{2(n+1)+1} + 1$ est bien un multiple de 11.
On en déduit que $N + N'$ est un multiple de 11.
En s'appuyant sur ce résultat, la somme du carré parfait cherché $N = a^2$ et du nombre $N' = b^2$ obtenu en le « retournant » est divisible par 11. D'après le 1., a et b doivent être des multiples de 11.
D'autre part le chiffre des unités du carré parfait N ne peut être que 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 (on regarde tous les cas de chiffre des unités de N). Pour que N' soit aussi un carré parfait, son chiffre des unités doit aussi être 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 et donc le chiffre de milliers de N doit être 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
Le chiffre 0 est exclu comme chiffre des unités de N' car le chiffre des milliers de N doit être non nul.
Le chiffre 5 est exclu car s'il est le chiffre des milliers de N, il est aussi celui des unités de N' et donc de b. Il existe alors un entier c compris entre 0 et 9 tel que $b = 10c + 5$ et alors, comme $(10c + 5)^2 \equiv 25$ modulo 100, N' aurait pour chiffre des unités 5 et pour chiffre des dizaines 2 et donc $N = 52 - -$ soit N compris entre 5 200 et 5 300 donc a compris strictement entre 72 et 73, ce qui est impossible pour un entier.
On a donc N compris entre 1 000 et 2 000 ou entre 4 000 et 5 000 ou entre 6 000 et 7 000 ou 9 000 et 10 000 soit a compris entre 31 et 45 ou entre 63 et 71 ou entre 77 et 84 ou entre 94 et 100.
Comme a doit de plus être un multiple de 11, a appartient à l'ensemble $\{33,44,66,77,99\}$.
On vérifie que les seules valeurs qui conviennent sont $N = 33^2 = 1\,089$ et $N = 99^2 = 9\,801$.

Suites numériques

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\boldsymbol{N}^*$par $u_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$. Calculer $u_{2\,023}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+2} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{u_n}} = 1 - \frac{u_n}{u_n - 1} = -\frac{1}{u_n - 1}$

Donc $u_{n+3} = 1 - \frac{1}{u_{n+2}} = 1 - (u_n - 1) = u_n$. La suite (u_n) est donc périodique, de période 3.

Comme $2\,023 = 3 \times 674 + 1$, $u_{2\,023} = u_1 = 2$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs et telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2.$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n$.

Montrons le résultat par récurrence.

Pour $n = 1$, $u_1^3 = u_1^2$ s'écrit $u_1^2(u_1 - 1) = 0$ soit puisque $u_1 > 0$, $u_1 = 1$.

Si pour tout entier $1 \leq k \leq n$, $u_k = k$ alors $u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 + u_{n+1}^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1})^2$ s'écrit $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + u_{n+1}^3 = (1 + 2 + \cdots + n + u_{n+1})^2$

Soit $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + u_{n+1}^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2(1 + 2 + \cdots + n)u_{n+1} + u_{n+1}^2$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ donc $u_{n+1}^3 = 2(1 + 2 + \cdots + n)u_{n+1} + u_{n+1}^2$

Soit $u_{n+1}^3 = n(n+1)u_{n+1} + u_{n+1}^2$. Comme $u_{n+1} > 0$, en particulier $u_{n+1} \neq 0$ donc $u_{n+1}^2 = n(n+1) + u_{n+1}$.

L'équation du second degré $x^2 - x - n(n+1) = 0$ a pour solutions $-n$ et $n+1$. Comme la suite est à termes strictement positifs, on ne retient que la solution $n+1$. On a donc bien $u_{n+1} = n+1$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n$.

Exercice 3

Soit n un entier strictement positif, k un entier tel que $2 \leq k \leq n$ et k entiers strictement positifs deux à deux distincts $a_1, a_2, \ldots,, a_k$ appartenant à l'ensemble $\{1,2, \ldots, n\}$ tels que, pour tout entier i, $1 \leq i \leq k-1$, n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$.

Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ s'écrit aussi $a_i \equiv a_i a_{i+1}$ (modulo n)

On a donc, en utilisant les propriétés des congruences, $a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3 \equiv \cdots \equiv a_1 a_2 \ldots a_k$ (modulo n).

Si n divise $a_k(a_1 - 1)$, alors $a_k \equiv a_k a_1$ (modulo n) et, comme précédemment

$a_k \equiv a_k a_1 \equiv a_k a_1 a_2 \equiv a_k a_1 a_2 a_3 \equiv \cdots \equiv a_k a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1}$ (modulo n).

On a donc alors $a_1 \equiv a_k$ (modulo n). Or a_1 et a_k appartiennent à $\{1,2, \ldots, n\}$, donc $a_1 = a_k$ ce qui contredit l'hypothèse deux à deux distincts.

Exercice 4

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $x_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} \leq x_n$.

1. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999$.
2. Trouver une telle suite telle que $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \leq 4$.

1. Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n-1$, $(x_k - 2x_{k+1})^2 = x_k^2 - 4x_k x_{k+1} + 4x_{k+1}^2$ d'où, puisqu'un carré est positif ou nul, $\frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_k - x_{k+1})$.

On en déduit que $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 4(x_0-x_1+x_1-x_2+\cdots+x_{n-2}-x_{n-1}+x_{n-1}-x_n)$

Soit $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 4(x_0-x_n)$. Or $x_0=1$ donc $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 4(1-x_n)$.

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. Soit l sa limite finie. On sait que $l\geq 0$.

Si $l=0$, alors il existe un entier n tel que $x_n\leq\frac{1}{4\,000}$.

Alors $1-x_n\geq 1-\frac{1}{4\,000}$ d'où $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3,999$.

Si $l>0$, tout élément de la suite (décroissante) est supérieur ou égal à l et pour tout entier $n\geq\frac{4}{l}$,

$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq\frac{x_0x_1}{x_1}+\frac{x_1x_2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_n}$ soit $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}\geq nl\geq 4$.

2. Il suffit de poser $x_n=\frac{1}{2^n}$. Alors, pour tout entier n et pour tout entier k, $0\leq k\leq n-1$,

$\frac{x_k^2}{x_{k+1}}=\frac{2^{k+1}}{2^{2k}}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

Et $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}=2+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=2+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=4-\frac{1}{2^{n-2}}$

D'où $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\leq 4$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq1}$ telle que, pour tous entiers $m\geq 1$ et $n\geq 1$, $|u_m+u_n-u_{m+n}|\leq\frac{1}{m+n}$.

Montrer que $(u_n)_{n\geq1}$ est une suite arithmétique.

D'après l'hypothèse on a aussi, pour tous entiers $m\geq 1$ et $n\geq 1$,

$|u_{m+1}+u_n-u_{m+1+n}|\leq\frac{1}{m+1+n}$ et $|u_m+u_{n+1}-u_{m+n+1}|\leq\frac{1}{m+n+1}$.

Comme $(u_{m+1}+u_n-u_{m+1+n})-(u_m+u_{n+1}-u_{m+n+1})=(u_{m+1}-u_m)-(u_{n+1}-u_n)$

On en déduit que :

$|(u_{m+1}-u_m)-(u_{n+1}-u_n)|\leq|u_{m+1}+u_n-u_{m+1+n}|+|u_m+u_{n+1}-u_{m+n+1}|\leq\frac{2}{m+1+n}<\frac{2}{n}$.

Pour tout entier $k\geq 1$, on peut ainsi écrire :

$|(u_{m+1}-u_m)-(u_{n+1}-u_n)|\leq|(u_{m+1}-u_m)-(u_{k+1}-u_k)+(u_{k+1}-u_k)-(u_{n+1}-u_n)|$

D'où $|(u_{m+1}-u_m)-(u_{n+1}-u_n)|\leq|(u_{m+1}-u_m)-(u_{k+1}-u_k)|+|(u_{k+1}-u_k)-(u_{n+1}-u_n)|$

D'où, pour tout entier $k\geq 1$, $|(u_{m+1}-u_m)-(u_{n+1}-u_n)|\leq 2\times\frac{2}{k}$.

Ceci n'est possible que si $|(u_{m+1}-u_m)-(u_{n+1}-u_n)|=0$ soit $u_{m+1}-u_m=u_{n+1}-u_n$, et ceci pour tous entiers $m\geq 1$ et $n\geq 1$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est une suite arithmétique.

Exercice 6

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :

$$x_1=\frac{1}{10},\ y_1=\frac{1}{8}\text{ et, pour tout entier } n\geq 1,\ x_{n+1}=x_n+x_n^2\text{ et }y_{n+1}=y_n+y_n^2.$$

Existe-t-il des entiers naturels non nuls n et m tels que $x_n=y_m$?

On peut déjà démontrer par récurrence que les suites (x_n) et (y_n) sont à termes positifs.

On calcule les valeurs exactes ou des valeurs approchées des premiers termes des deux suites :

$x_1=\frac{1}{10}=0,1$ $\quad x_2=0,11$ $\quad x_3=0,1221$ $\quad x_4\approx 0,1370$

$y_1=0,125$ $\quad y_2=0,140625$ $\quad y_3\approx 0,1604$ $\quad y_4\approx 0,1861$

On constate que $x_3<y_1<x_4$.

On va montrer par récurrence que, pour tout entier $n\geq 1$, $x_{n+2}<y_n<x_{n+3}$. (1)

C'est vrai pour $n=1$.

Si c'est vrai pour un entier n, montrons que $x_{n+3}<y_{n+1}<x_{n+4}$.

Comme $0\leq x_{n+2}<y_n<x_{n+3}$, on a $x_{n+2}^2<y_n^2<x_{n+3}^2$. (2)

En ajoutant membre à membre (1) et (2), on obtient $x_{n+3}<y_{n+1}<x_{n+4}$.

On a donc bien, pour tout entier $n\geq 1$, $x_{n+2}<y_n<x_{n+3}$.

Tout terme de la suite (y_n) est donc compris strictement entre deux termes consécutifs de la suite (x_n). Il est donc impossible de trouver deux entiers naturels non nuls n et m tels que $x_n = y_m$.

Exercice 7

Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $x_{2k} = -x_k$ et $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$.
Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$.

L'idée est alors de raisonner par récurrence en posant, pour tout entier n, $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.
On a déjà $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_{2\times2-1} = (-1)^3 x_2 = 1$ et $x_4 = -x_2 = 1$ donc on peut vérifier que $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0, S_3 \geq 0, S_4 \geq 0$.
De plus, pour tout entier $k \geq 1$, on a :
$x_{4k-3} = x_{2(2k-1)-1} = (-1)^{2k} x_{2k-1} = x_{2k-1}$ et $x_{4k-2} = -x_{2k-1}$ donc $x_{4k-3} + x_{4k-2} = 0$ (*)
$x_{4k-1} = x_{2(2k)-1} = (-1)^{2k+1} x_{2k} = -x_{2k} = x_k$ et $x_{4k} = -x_{2k} = x_k$ donc $x_{4k-1} + x_{4k} = 2x_k$.
Donc, si pour un entier $p \geq 1$, on a pour tout entier $k \leq 4p$, $S_k \geq 0$, alors montrons que pour tout entier $k \leq 4(p+1)$, $S_k \geq 0$, ce qui revient à prouver que $S_{4p+4} \geq 0, S_{4p+3} \geq 0, S_{4p+2} \geq 0$ et $S_{4p+1} \geq 0$.

- $S_{4p} = \sum_{k=1}^{k=p} \big((x_{4k-3} + x_{4k-2}) + (x_{4k-1} + x_{4k})\big) = \sum_{k=1}^{k=p} 2x_k = 2S_p$ et donc $S_{4p+4} = 2S_{p+1}$.
  Comme $p + 1 \leq 4p$, $S_{p+1} \geq 0$ donc $S_{4p+4} \geq 0$.
- $S_{4p+2} = S_{4p} + x_{4p+1} + x_{4p+2}$. Or $x_{4p+1} + x_{4p+2} = x_{4(p+1)-3} + x_{4(p+1)-2} = 0$ d'après le calcul (*) fait plus haut, donc $S_{4p+2} = S_{4p}$ et donc $S_{4p+2} \geq 0$.
- $S_{4p+3} = S_{4p+2} + x_{4p+3}$. Or $x_{4p+3} = x_{2(2p+2)-1} = (-1)^{2p+3} x_{2p+2} = -x_{2p+2} = x_{p+1}$ et $x_{4p+4} = -x_{2p+2} = x_{p+1}$ donc $x_{4p+3} = x_{4p+4} = \frac{x_{4p+3}+x_{4p+4}}{2} = \frac{S_{4p+4}-S_{4p+2}}{2}$ d'où $S_{4p+3} = S_{4p+2} + \frac{S_{4p+4}-S_{4p+2}}{2} = \frac{S_{4p+4}+S_{4p+2}}{2}$ et donc $S_{4p+3} \geq 0$.
- Si p est impair, alors, comme $S_{4p+1} = S_{4p} + x_{4p+1} = 2S_p + x_{4p+1}$, et S_p est la somme d'un nombre impair de termes valant ± 1 et donc tous congrus à 1 modulo 2, par somme des p termes de S_p, $S_p \equiv p$ modulo 2. Par conséquent S_p est impair. De plus S_p est positif donc $S_p \geq 1$ donc $2S_p \geq 2$ d'où $S_{4p} \geq 2$ et, puisque $x_{4p+1} = \pm 1$, $S_{4p} + x_{4p+1} \geq 1 \geq 0$ soit $S_{4p+1} \geq 0$.
  Si p est pair, alors, comme
  $x_{4p+1} = x_{2(p+1)-1} = (-1)^{p+2} x_{2p+1} = x_{2p+1} = x_{2(p+1)-1} = (-1)^{p+2} x_{p+1} = x_{p+1}$,
  $S_{4p+1} = S_{4p} + x_{4p+1} = 2S_p + x_{p+1} = S_p + S_{p+1}$ et donc $S_{4p+1} \geq 0$.

On en déduit bien que pour tout entier $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$.

Exercice 8

Montrer que pour toute paire d'entiers strictement positifs k et n, il existe k entiers strictement positifs (non nécessairement distincts) $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tels que :

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

On va raisonner par récurrence sur l'entier k (qui correspond au nombre de facteurs dans le produit) et démontrer l'affirmation $P(k)$: pour tout un entier k et pour tout entier n, il existe k entiers strictement positifs (non nécessairement distincts) $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tels que $1 + \frac{2^k-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$
Pour $k = 1$, on pose $m_1 = n$ et $P(1)$ est vraie.
Si, pour un entier k, $P(k)$ est vraie c'est-à-dire : pour tout entier n, il existe k entiers strictement positifs (non nécessairement distincts) $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tels que $1 + \frac{2^k-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$
et on cherche si, pour tout entier n, il existe des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}$ tels que
$1 + \frac{2^{k+1}-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)\left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$.
Or $1 + \frac{2^{k+1}-1}{n} = \frac{n+2^{k+1}-1}{n}$. On cherche donc à transformer cette expression en $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{2^k-1}{n'}\right)$ pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence sur k.

- Si n est impair, on pose $a = n$.

$\frac{\frac{n+2^{k+1}-1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n+2^{k+1}-1}{n+1} = \frac{n+1+2^{k+1}-2}{n+1} = 1 + \frac{2^{k+1}-2}{n+1}$.

Or $n+1$ est pair donc il existe un entier n' tel que $n+1=2n'$ et alors $1+\frac{2^{k+1}-2}{n+1} = 1+\frac{2^k-1}{n'}$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe k entiers strictement positifs tels que

$\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right) = 1+\frac{2^k-1}{n'}$

D'où $1+\frac{2^{k+1}-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et, en posant $m_{k+1}=n$, $P(k+1)$ est vraie.

- Si n est pair, alors $\frac{\frac{n+2^{k+1}-1}{n}}{1+\frac{1}{n+2^{k+1}-2}} = \frac{(n+2^{k+1}-1)}{n} \times \frac{n+2^{k+1}-2}{n+2^{k+1}-1} = \frac{n+2^{k+1}-2}{n} = 1+\frac{2^{k+1}-2}{n} = 1+\frac{2^k-1}{\frac{n}{2}}$.

Or, comme n est pair, $n' = \frac{n}{2}$ est un entier donc, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et il existe k entiers strictement positifs tels que $\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right) = 1+\frac{2^k-1}{n'}$

D'où $1+\frac{2^{k+1}-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)\left(1+\frac{1}{m_{k+1}}\right)$ où $m_{k+1} = n+2^{k+1}-2$.

Au final, pour tout entier k, $P(k)$ est vraie.

Fonctions – Équations et inéquations

Exercice 1

Déterminer tous les triplets (x, y, z)de réels strictement compris entre 0 et 1 et vérifiant :

$$\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)=\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right). \qquad (1)$$

On commence par étudier le signe de chacun des facteurs des produits.

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x)= x+\frac{1}{2x}-1$. f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$, $f'(x)=1-\frac{1}{2x^2}=\frac{2x^2-1}{2x^2}=\frac{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}{2x^2}$ et $f'(x)$ a le signe de $(\sqrt{2}x-1)$. f admet donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ comme minimum sur $]0,1[$. Or $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ donc, pour tout $x\in]0,1[$, $x+\frac{1}{2x}-1$ et tous les facteurs du membre de gauche de l'égalité (1) sont strictement positifs.

Le membre de droite est donc aussi positif, ce qui signifie que soit tous les facteurs sont positifs, soit deux facteurs sont négatifs. Montrons que tous les facteurs sont positifs.

Supposons que deux facteurs sont négatifs, par exemple $1-\frac{xy}{z}<0$ et $1-\frac{yz}{x}<0$, soit $\frac{xy}{z}>1$ et $\frac{yz}{x}>1$ alors $\frac{xy}{z}\times\frac{yz}{x}>1$ soit $y^2>1$ ce qui contredit $y\in]0,1[$. Donc tous les facteurs du membre de droite de (1) sont strictement positifs et démontrer l'égalité (1) revient à démontrer l'égalité entre les carrés des deux membres.

Or $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)=x^2+2x\left(\frac{1}{2x}-1\right)+\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}-\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\times\frac{zx}{y}\right)$

Soit $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)=x^2+1-2x+\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2-1+\frac{x}{yz}(y^2+z^2)-x^2$

Soit $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)=\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\frac{x}{yz}(y^2+z^2-2yz)$

Soit $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)=\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\frac{x}{yz}(y-z)^2$ d'où $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)\geq 0$

Soit $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2\geq\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)\geq 0$

On fait le même travail avec $\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)^2-\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{xy}{z}\right)$ et $\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)^2-\left(1-\frac{zx}{y}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)$

d'où $\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)^2\geq\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{xy}{z}\right)\geq 0$ et $\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)^2\geq\left(1-\frac{zx}{y}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\geq 0$.

Par produit, $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)^2\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)^2\geq\left(1-\frac{xy}{z}\right)^2\left(1-\frac{yz}{x}\right)^2\left(1-\frac{zx}{y}\right)^2$

Si on pose $A=x+\frac{1}{2x}-1, B=y+\frac{1}{2y}-1, C=z+\frac{1}{2z}-1, D=1-\frac{xy}{z}, E=1-\frac{yz}{x}$ et $F=1-\frac{zx}{y}$.

D'où $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)\geq\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)$.

On a vu que $A^2\geq DF\geq 0$, $B^2\geq ED\geq 0$ et $C^2\geq EF\geq 0$. Le produit $A^2B^2C^2$ ne pourra être égal au produit $DFEDEF$ que si chaque inégalité est une égalité.

Avec égalité si, et seulement si, $\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\frac{x}{yz}(y-z)^2=0$, $\left(\frac{1}{2y}-1\right)^2+\frac{y}{zx}(z-x)^2=0$ et $\left(\frac{1}{2z}-1\right)^2+\frac{z}{xy}(x-y)^2=0$ soit $\frac{1}{2x}-1=0, \frac{x}{yz}(y-z)^2=0$, $\frac{1}{2y}-1=0$, $\frac{y}{zx}(z-x)^2=0$, $\frac{1}{2z}-1=0$ et $\frac{z}{xy}(x-y)^2=0$ soit $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Exercice 2

Pour tout réel x, on appelle partie entière de x qu'on note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Déterminer toutes les fonctions numériques f définies sur **R** telles que :

pour tous réels x et y, $f(E(x)y)=f(x)E(f(y))$. (1)

On remarque déjà que si on pose $x=0$, alors comme $E(0)=0$, d'après l'équation fonctionnelle (1), pour tout y, $f(0\times y)=f(0)E(f(y))$ soit $f(0)\big(1-E(f(y))\big)=0$ c'est-à-dire $[E(f(y))=1$ pour tout réel $y]$ ou $[f(0)=0]$.

- $E(f(y))=1$ pour tout réel y alors en posant $x=1$, alors $E(x)=1$ et $f(E(x)y)=f(x)E(f(y))$ s'écrit

$f(y) = f(1) \times 1 = f(1)$. Comme cette égalité doit être vérifiée pour tout réel y, la fonction f est constante prenant une valeur c telle que $E(c) = 1$ c'est-à-dire $c \in [1,2[$.

- Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout réel y, $0 = f(0) = f(x)E(f(y))$
  - Si pour tout réel y, $E\big(f(y)\big) = 0$, alors pour $x = 1$, (1) donne $f(y) = f(1) \times 0 = 0$. La fonction f est alors la fonction constante nulle.
  - Sinon, il existe un réel y_0 tel que $E\big(f(y_0)\big) \neq 0$, alors pour tout $x \in [0,1[$, $0 = f(x)E(f(y_0))$

  donc $f(x) = 0$.

  Soit alors z un réel quelconque, il existe un réel $x \in [0,1[$ et un réel y tel que $z = yE(x)$.

  En effet, si $n = E(z)$, alors $n \leq z < n + 1$ d'où $n + 1 \leq z + 1 < n + 2$ et $n - 1 \leq z - 1 < n$

  Donc $E(z + 1) = n + 1$ et $E(z - 1) = n - 1$.

  Alors si $z \geq 0$, comme $z < n + 1, n + 1 > 0$ alors $0 \leq \frac{z}{n+1} < 1$ soit $0 \leq \frac{z}{E(z+1)} < 1$ donc $f\left(\frac{z}{E(z+1)}\right) = 0$.

  On pose donc $x = z + 1$ et $y = \frac{z}{E(z+1)} = \frac{z}{E(x)}$.

  Si $z < 0$, comme $n - 1 \leq z, n - 1 < 0$ alors $1 > \frac{n}{n-1} \geq \frac{z}{n-1} > 0$ soit $1 > \frac{z}{E(z-1)} > 0$ donc $f\left(\frac{z}{E(z-1)}\right) = 0$.

  On pose donc $x = z - 1$ et $y = \frac{z}{E(z-1)} = \frac{z}{E(x)}$.

  Dans les deux cas, (1) donne $f(z) = f(x)E\big(f(y)\big) = f(x)E\big(f(y)\big) = f(x) \times 0 = 0$.

Au final, les fonctions solutions du problème sont les fonctions constantes prenant soit la valeur 0 soit une valeur $c \in [1,2[$.

Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie sur **R** et telle que :

pour tous réels x et y, $f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$.

Montrer que pour tout réel $x \leq 0$, $f(x) = 0$.

On commence par transformer cette inégalité à l'aide d'un changement de variables. La condition donnée équivaut en effet à : pour tous réels x et z, $f(z) \leq (z - x)f(x) + f(f(x))$ et on note $I(x, z)$ cette inégalité.
Pour x fixé, avoir $I(x, z)$ pour tout réel z traduit le fait que la fonction f est majorée par une fonction affine, la fonction $g : z \mapsto f(x)z + \big(f\big(f(x)\big) - xf(x)\big)$.
On cherche maintenant une minoration de la fonction f.
Or $I(0, f(x))$ s'écrit $f\big(f(x)\big) \leq f(x)f(0) + f(f(0))$
d'où $f(z) \leq (z - x)f(x) + f(f(x)) \leq (z - x)f(x) + f(x)f(0) + f(f(0))$
soit $f(z) \leq \big(z - x + f(0)\big)f(x) + f(f(0))$.
Pour $z = f(0)$ cette inégalité s'écrit $f\big(f(0)\big) \leq (2f(0) - x)f(x) + f(f(0))$ d'où :

si $x < 2f(0)$, $f(x) \geq 0$. (1)

De même, d'après (1), si $z < 2f(0)$ alors $f(z) \geq 0$ et $I(x, z)$ permet d'écrire $0 \leq (z - x)f(x) + f(f(x))$ soit $0 \leq g(z)$. Une fonction affine $z \mapsto az + b$ d'abord positive puis négative est telle que $a \leq 0$ donc ici :

$f(x) \leq 0$, et ceci pour tout réel x. (2)

De (1) et (2), on tire : si $x < 2f(0)$, $f(x) = 0$. (*)
Montrons que $f(0) = 0$. $I(x, x)$ s'écrit $f(x) \leq 0f(x) + f(f(x))$ soit $f(x) \leq f(f(x))$. (3)
Si $x < 2f(0)$, $f(x) = 0$ et donc $f\big(f(x)\big) = f(0)$. De (3), on déduit alors $0 \leq f(0)$. Or, d'après (2), $f(0) \leq 0$ donc $f(0) = 0$ et, d'après (*), pour tout réel $x \leq 0$, $f(x) = 0$.

Exercice 4

Soit f une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins sept solutions dans l'intervalle $\left[0, \frac{7}{10}\right]$.
2. Donner un exemple de telle fonction.

1. La fonction $x \mapsto x + \frac{3}{10}$ est affine et donc continue sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$ et prend ses valeurs sur $\left[\frac{3}{10}, 1\right]$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc sur $\left[\frac{3}{10}, 1\right]$. Par composition la fonction $x \mapsto f\left(x + \frac{3}{10}\right)$ sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$.

Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$ par $g(x) = f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$. La fonction g est continue sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$.

Comme de plus, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ soit $g(x) \neq 0$, la fonction g a un signe constant sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Quitte à changer g en $-g$, on supoose que pour tout réel $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$, $g(x) > 0$.

On a alors :

$g(0) > 0$ soit $f\left(\frac{3}{10}\right) - f(0) > 0$ soit $f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$ car $f(0) = 0$

$g\left(\frac{3}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{6}{10}\right) - f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right)$

$g\left(\frac{6}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{9}{10}\right) - f\left(\frac{6}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{9}{10}\right) > f\left(\frac{6}{10}\right)$

D'où $f\left(\frac{9}{10}\right) > f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$

De même

$g\left(\frac{7}{10}\right) > 0$ soit $f(1) - f\left(\frac{7}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$ car $f(1) = 0$

$g\left(\frac{4}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{7}{10}\right) - f\left(\frac{4}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{4}{10}\right) < f\left(\frac{7}{10}\right)$

$g\left(\frac{1}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{4}{10}\right) - f\left(\frac{1}{10}\right) > 0$ soit $f\left(\frac{1}{10}\right) < f\left(\frac{4}{10}\right)$

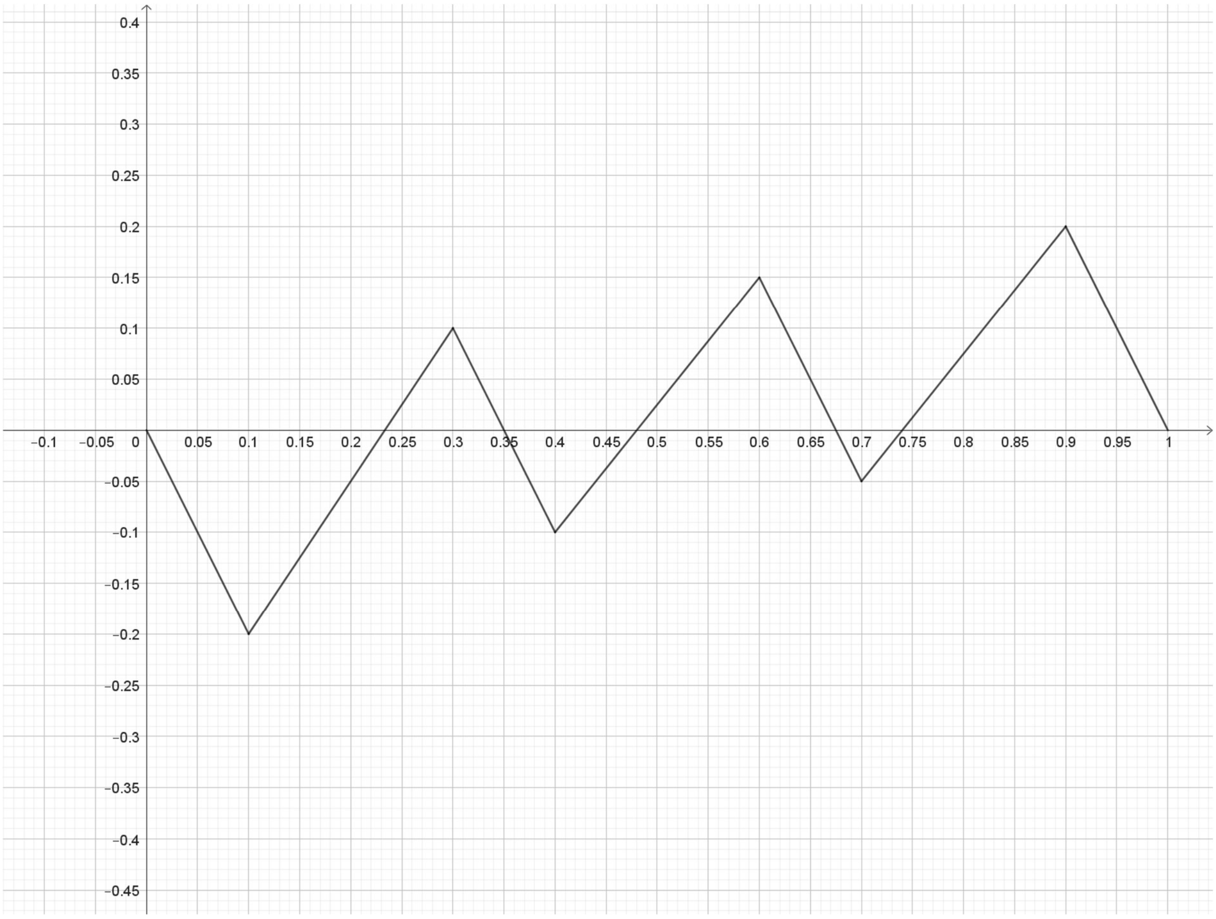
D'où $f\left(\frac{1}{10}\right) < f\left(\frac{4}{10}\right) < f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$.

Au final :

$f\left(\frac{1}{10}\right) < 0 < f\left(\frac{3}{10}\right)$, $f\left(\frac{4}{10}\right) < 0 < f\left(\frac{3}{10}\right)$, $f\left(\frac{4}{10}\right) < 0 < f\left(\frac{6}{10}\right)$, $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0 < f\left(\frac{6}{10}\right)$ et $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0 < f\left(\frac{9}{10}\right)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que la fonction f s'annule sur chacun des cinq intervalles $\left]\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right[$, $\left]\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right[$, $\left]\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right[$, $\left]\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right[$, $\left]\frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right[$. Comme de plus $f(0) = f(1) = 0$, la fonction f s'annule bien au moins sept fois sur $[0,1]$.

2. Un exemple de telle fonction est celui de la fonction représentée ci-dessous.



Exercice 5

Déterminer tous les nombres réels p pour lesquels l'équation

$$x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0$$

admet trois racines réelles distinctes et qui sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

Soit a, b, c les trois racines telles que $0 < a < b < c$ et soit $P(x) = x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3$.
Alors, $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ d'où, en développant et en identifiant les deux expressions du même polynôme :

$a + b + c = 2p(p+1)$ $\quad\quad$ $ab + bc + ca = p^4 + 4p^3 - 1$ $\quad\quad$ et $\quad\quad$ $abc = 3p^3$.

On a de plus $a^2 + b^2 = c^2$ puisque c est la plus grande longueur des côtés d'un triangle rectangle, a et b étant les deux autres longueurs. On en tire

$2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \left(2p(p+1)\right)^2 - 2(p^4 + 4p^3 - 1\ )$

soit, en développant, $2c^2 = 2(p^2+1)^2$. Comme $c > 0$, $c = p^2 + 1$.

On en déduit

$a + b = 2p(p+1) - (p^2+1) = p^2 + 2p - 1$

Et $ab = p^4 + 4p^3 - 1\ - (a+b)c = p^4 + 4p^3 - 1 - (p^2 + 2p - 1\ )(p^2+1) = 2p^3 - 2p$.

a et b sont donc les solutions de l'équation du second degré $x^2 - (p^2 + 2p - 1\ ) + 2p^3 - 2p = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \ (p^2 + 2p - 1\ )^2 - 4(2p^3 - 2p) = p^4 - 4p^3 + 2p^2 + 4p + 1$

On cherche à écrire ce discriminant comme un carré ce qui revient à chercher s'il existe deux réels u et v tels que $p^4 - 4p^3 + 2p^2 + 4p + 1 = (p^2 + up + v)^2$.

Soit $p^4 - 4p^3 + 2p^2 + 4p + 1 = p^4 + 2up^3 + (u^2 + 2v)p^2 + 2uvp + v^2$.

On se ramène ainsi à résoudre le système $\begin{cases} 2u = -4 \\ u^2 + 2v = 2 \\ 2uv = 4 \\ v^2 = 1 \end{cases}$. La première équation puis la troisième équation donnent $u = -2$ et $v = -1$ et ces valeurs vérifient les deux autres équations.

Donc $\Delta = (p^2-2p-1)^2$ et les nombres a et b correspondent aux solutions
$\frac{1}{2}\left((p^2+2p-1)-(p^2-2p-1)\right)=2p$ et $\frac{1}{2}\left((p^2+2p-1)+(p^2-2p-1)\right)=p^2-1$.
Comme a et b sont des longueurs on doit avoir $p>0$ et $p^2-1>0$ soit $p>1$.
Il reste à traiter la condition $abc=3p^3$ qui s'écrit $2p\times(p^2-1)\times(p^2+1)=3p^3$
Soit, puisque $p\neq 0$, $2(p^4-1)=3p^2$ soit $2p^4-3p^2-2=0$.
Les solutions de l'équation bicarrée $2X^2-3X-2=0$ sont $-\frac{1}{2}$ et 2. On ne garde que la solution positive 2 et comme $p>1>0$, $p^2=2$ donne $p=\sqrt{2}$ (qui est bien supérieur à 1).
Au final, le seul nombre p qui convient est $p=\sqrt{2}$.

Exercice 6

Soit x, y, z des réels strictement positifs et deux à deux distincts.
Montrer que $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$.

On commence par montrer que pour tous réels a, b strictement positifs et distincts,
$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{ab}$.
$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ab}=\frac{1}{(a-b)^2a^2b^2}\left(a^2b^2+(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)\right)$
$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ab}$ a le signe de $\left(a^2b^2+(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)\right)$
Or $a^2b^2+(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)=a^2b^2+(a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2-4ab)$
Soit $a^2b^2+(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)=a^2b^2+(a^2+b^2)^2-6ab(a^2+b^2)+8a^2b^2$
Soit $a^2b^2+(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)=(a^2+b^2)^2-2\times 3ab(a^2+b^2)+9a^2b^2$
C'est-à-dire $a^2b^2+(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)=(a^2+b^2-3ab)^2$
On en déduit que $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ab}\geq 0$ soit $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{ab}$.
Comme x, y, z jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $0<x<y<z$.
Alors, on peut poser $a=y-x$ et $b=z-x$. On a a, b strictement positifs et distincts
Donc $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{ab}$ soit $\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{(y-x)(z-x)}$
Or $(xy+yz+zx)-(y-x)(z-x)=2xy+2xz-x^2=x(2y+2z-x)$ et, comme $0<x<y<z$,
$x(2y+2z-x)>0$ d'où $(xy+yz+zx)>(y-x)(z-x)>0$ donc $\frac{4}{xy+yz+zx}<\frac{4}{(y-x)(z-x)}$.
On a donc bien $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+z}$.

Exercice 7

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que pour tous entiers $m\geq 1$ et $n\geq 1$

$$f(f(m)+f(n))=m+n.$$

Montrons que la fonction f est injective, c'est-à-dire que deux entiers distincts ont des images distinctes par f.
En effet, si $f(m)=f(n)=k$, alors $f(2k)=f\big(f(m)+f(n)\big)=m+n$ et $f(2k)=f\big(2f(n)\big)=2n$ donc $m=n$.
Soit $k>1$ un entier, montrons que $f(k)-f(k-1)=f(2)-f(1)$ soit $f(k)+f(1)=f(k-1)+f(2)$.
$k-1+2=k+1$ donc $f\big(f(k-1)+f(2)\big)=k+1=f\big(f(k)+f(1)\big)$. Comme f est injective, on en déduit qu'on a bien $f(k)+f(1)=f(k-1)+f(2)$.
On peut alors écrire, pour tout entier $n>1$:
$f(n)-f(1)=f(n)-f(n-1)+\cdots+f(2)-f(1)=(n-1)\big(f(2)-f(1)\big)$
Soit $f(n)=f(1)+(n-1)\big(f(2)-f(1)\big)$.
Montrons que $f(1)=1$.
En choisissant $n=2f(1)$, on obtient d'une part $f(2f(1))=f\big(f(1)+f(1)\big)=2$ et, d'autre part,
$f(2f(1))=(2f(1)-1)\big(f(2)-f(1)\big)+f(1)$ donc $(2f(1)-1)\big(f(2)-f(1)\big)=2-f(1)$. (*)

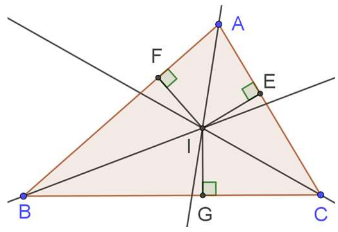
$2f(1)-1$ est donc un entier qui divise $2-f(1)$ et donc $|2-f(1)|$. En particulier, comme f est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, $0 < 2f(1)-1 \leq |2-f(1)|$.
Si $2-f(1) \geq 0$ cette inégalité s'écrit $2f(1)-1 \leq 2-f(1)$ soit $f(1) \leq 1$.
Si $2-f(1) \leq 0$ cette inégalité s'écrit $2f(1)-1 \leq -2+f(1)$ soit $f(1) \leq -1$.
Comme $f(1)$ est un entier naturel non nul, la seule possibilité est $f(1)=1$
et donc, d'après (*), $f(2)=\frac{2-f(1)}{2f(1)-1}+1=2$.
Alors, pour tout entier $n>1$, $f(n)=f(1)+(n-1)\big(f(2)-f(1)\big)=1+(n-1)\times 1$ soit $f(n)=n$.

Géométrie – Nombres complexes

Exercice 1 – tiré d'un problème du concours général 2006

Rappel :
Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point I.

Le point I est le centre d'un cercle inscrit dans le triangle et tangent aux côtés du triangle.



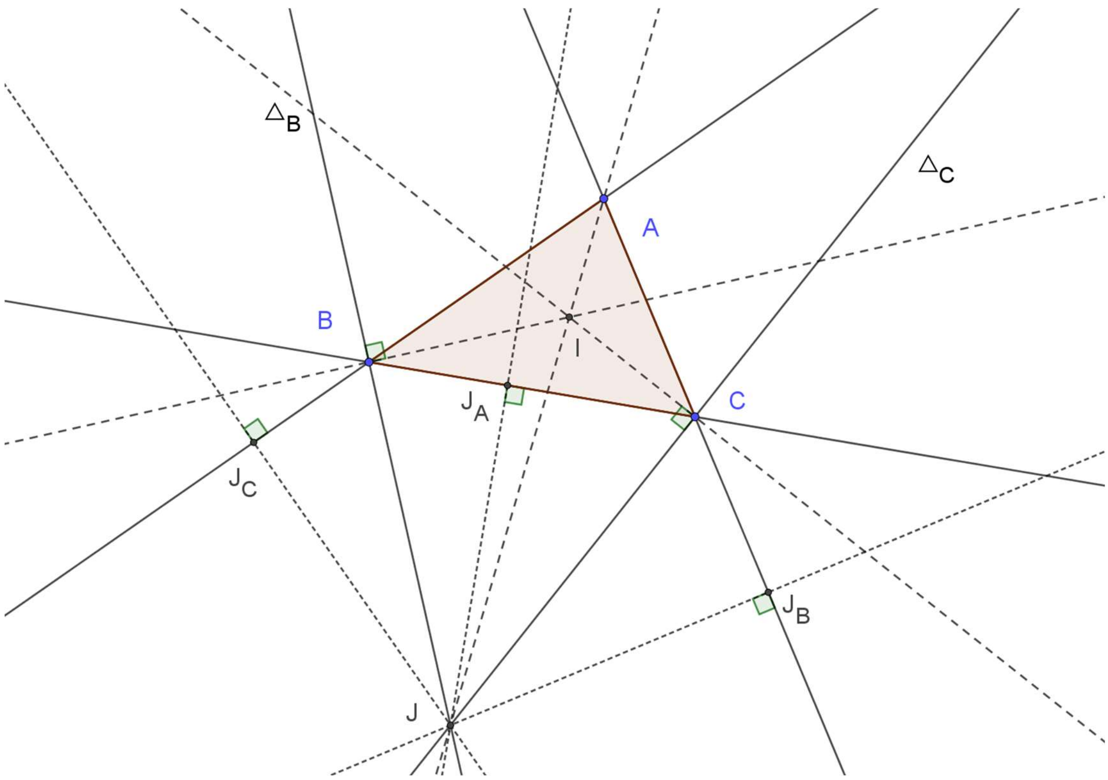
Soit ABC un triangle et h la longueur de la hauteur issue de A. On note Γ le cercle inscrit dans le triangle ABC, I son centre et r son rayon. On rappelle que I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC.
On note Δ_{B} (respectivement Δ_{C}) la droite passant par B et perpendiculaire à (BI) (respectivement passant par C et perpendiculaire à (CI)).

1. ***a.*** Soit J le point d'intersection de Δ_{B} et Δ_{C}.
Montrer que J est à égale distance des droites (AB), (BC) et (CA).
b. En déduire que J appartient à la droite (AI) et est le centre d'un cercle Γ' tangent aux droites (AB), (BC) et (CA). Ce cercle Γ' est le cercle exinscrit dans l'angle A au triangle ABC.

2. Montrer que les triangles AIC et ABJ sont semblables ainsi que les triangles AIB et AJC.
En déduire que $\mathrm{AI} \times \mathrm{AJ} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.

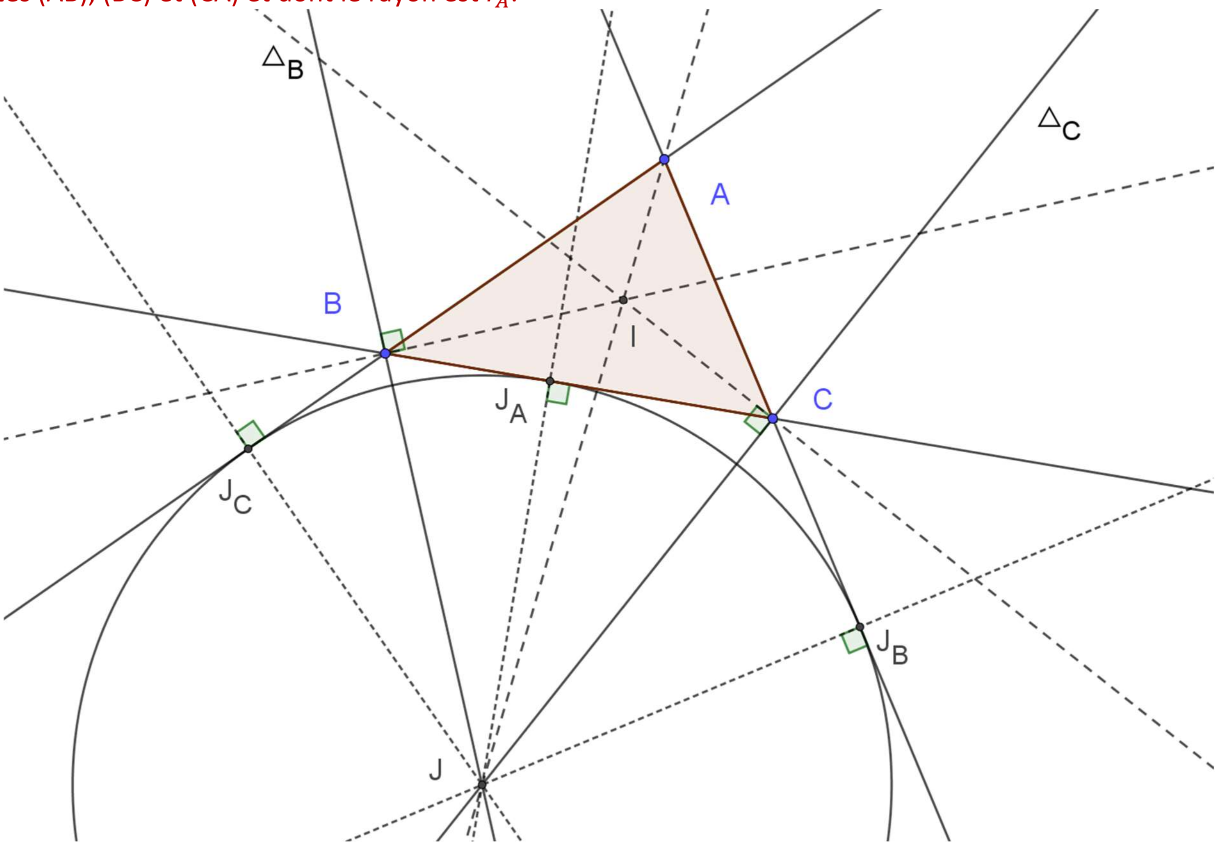
3. Soit f l'homothétie de centre A qui envoie J sur I. Préciser les images par f du cercle Γ' et de la droite (BC).
En déduire que $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AJ}} = \frac{h-2r}{h}$.

1. On note $\mathrm{J_A}, \mathrm{J_B}, \mathrm{J_C}$ les projetés orthogonaux respectifs du point J sur les droites (BC), (AC) et (AB).



a. Le point B est centre de symétrie de la figure constituée des droites (AB) et (CB). Les angles $\widehat{\mathrm{JBJ_C}}$ et $\widehat{\mathrm{JBJ_A}}$ sont complémentaires d'angles de même mesure (moitié de la mesure de $\widehat{\mathrm{ABC}}$). Ils ont donc même mesure.

Les triangles JBJ_C et JBJ_A, qui sont de plus rectangles, sont semblables avec le côté [JB] commun. Ils sont donc isométriques. On a donc $JJ_C = JJ_A$.
On démontrerait de même que $JJ_B = JJ_A$.
Le point J est donc bien à égales distances des droites (AB), (BC) et (CA).
b. Soit J' le point d'intersection des droites (AI) et Δ_B. Montrons que J' est confondu avec J.
Comme (AI) est la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ et J' appartient à (AI), alors J' est à égale distance de (AB) et (AC) (on le démontre en considérant les triangles rectangles obtenus avec les projetés orthogonaux de J' sur (AB) et (AC)).
De plus, par définition, Δ_B est la bissectrice extérieure de $\widehat{ABC}$ donc J', qui appartient à Δ_B est à égale distance de (AB) et (BC). On en déduit que J' est à égale distance de (AC) et (BC), ce qui signifie que J' appartient à l'une des bissectrices (intérieure ou extérieure) de $\widehat{BCA}$, c'est-à-dire à (CI) ou à Δ_C.
Si J' appartient à (CI) alors J' est le point commun à (AI) et à (CI) soit J' = I. Or I n'appartient pas à Δ_B.
Donc J' appartient à Δ_C et J' est le point d'intersection de Δ_B et Δ_C soit J = J'.
On en déduit que J appartient à (AI). On peut même préciser que A, I et J sont alignés dans cet ordre car I est intérieur à ABC et J extérieur à ABC.
On a vu que $JJ_A = JJ_B = JJ_C$ et les points J_A, J_B, J_C sont les projetés orthogonaux respectifs du point J sur les droites (BC), (AC) et (AB) donc, si on pose $JJ_A = JJ_B = JJ_C = r_A$ alors J est le centre d'un cercle Γ' tangent aux droites (AB), (BC) et (CA) et dont le rayon est r_A.



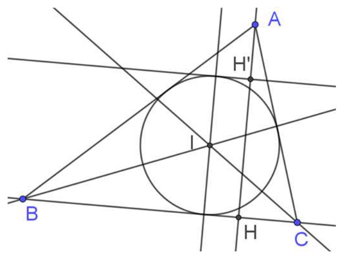
2. Montrons que les triangles AIC et ABJ sont semblables.
Par définition de I, $\widehat{CAI} = \widehat{BAI}$ d'où, puisque les points A, I et J sont alignés dans cet ordre, $\widehat{CAJ} = \widehat{CAI} = \widehat{BAI} = \widehat{BAJ}$. En particulier, $\widehat{CAI} = \widehat{BAJ}$
De plus, dans le triangle ACI, $\widehat{AIC} + \widehat{ICA} + \widehat{CAI} = 180°$ soit $\widehat{AIC} + \frac{1}{2}\widehat{BCA} + \frac{1}{2}\widehat{CAB} = 180°$
Soit $\widehat{AIC} = 180° - \frac{1}{2}\left(\widehat{BCA} + \widehat{CAB}\right) = 180° - \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{ABC}\right) = 90° + \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.
D'autre part, $\widehat{ABJ} = \widehat{ABJ_A} + \widehat{J_ABJ} = \widehat{ABC} + (90° - \widehat{BJJ_A})$, en se plaçant dans le triangle BJJ_A rectangle en J_A.
Or (BI) et (BJ) sont perpendiculaires de même que (BC) et (JJ_A), donc $\widehat{BJJ_A} = \widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.
d'où $\widehat{ABJ} = \widehat{ABC} + \left(90° - \frac{1}{2}\widehat{ABC}\right) = 90° + \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.

On a donc $\widehat{\mathrm{AIC}} = \widehat{\mathrm{ABJ}}$.

Les triangles AIC et ABJ sont donc bien semblables d'où $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AJ}}$ d'où $\mathrm{AI} \times \mathrm{AJ} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.

3. Le cercle Γ' a pour centre J et est tangent aux droites (AB), (BC) et (CA). Son image $f(\Gamma')$ par f est un cercle de centre I. De plus, les droites (AB) et (AC) passent par le centre de f donc elles sont invariantes par f donc $f(\Gamma')$ est tangent à (AB) et (AC). Il s'agit donc du cercle inscrit dans le triangle ABC soit le cercle Γ.

L'image de la droite (BC) par l'homothétie f est une droite D parallèle à (BC) (et non confondue car le centre A de f n'appartient pas à(BC)). De plus, comme Γ' est tangent à (BC), Γ est tangent à D. La seule droite parallèle à (BC) et tangente comme (BC) à Γ est l'image de (BC) par la symétrie centrale de centre I.



Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et H' son image par f.
Par hypothèse $h = \mathrm{AH}$.
De plus, le point H' appartient à D (image de la droite (BC) par f) et à la droite (AH).
Comme D et (BC) sont parallèles et donc toutes les deux perpendiculaires à (AH), on obtient $\mathrm{HH}' = 2r$ et $\mathrm{AH}' = \mathrm{AH} - 2r = h - 2r$.
On en déduit, en considérant deux expressions du rapport de f, que :
$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AJ}} = \frac{\mathrm{AH}\prime}{\mathrm{AH}} = \frac{h-2r}{h}$.

Exercice 2 – tiré d'un problème du concours général 2013

1. Dans l'espace, soit D_1 et D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2. Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et sécante à la fois à D_1 et D_2. Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?

L'espace étant muni d'un repère orthonormal, soit ABCDEFGH le cube dont les sommets ont pour coordonnées A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1).
Soit respectivement D_1, D_2, D_3 les droites (EF), (BC), (DH).
Soit $\mathcal{S}$ l'ensembles des points M(x, y, z) tels que $xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0$.

2. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2, D_3.

3. Montrer que les droites D_1, D_2, D_3 sont incluses dans $\mathcal{S}$.

4. Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$ rencontre $\mathcal{S}$ en 0, 1 ou 2 points.

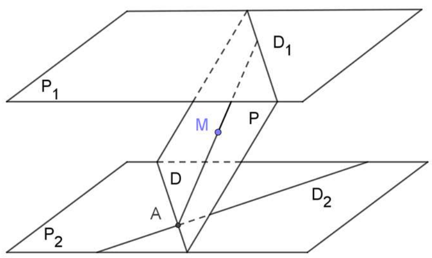
5. En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans $\mathcal{S}$.

6. Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2 et D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

1. Supposons qu'il existe deux droites distinctes D et D' passant par M et sécantes à la fois à D_1 et D_2. On note A et A' les points d'intersection de D et D' avec D_1 et on note B et B' les points d'intersection de D et D' avec D_2.
Comme M n'appartient ni à D_1 ni à D_2, les points A, A', B, B' sont distincts de M.
On a donc D passe par A, B et M et D' passe par A', B' et M. Si A = A', alors comme $D = (\mathrm{AM}) = (\mathrm{BM})$ et $D = (\mathrm{A'M}) = (\mathrm{B'M}) = D'$ donc $\mathrm{A} \neq \mathrm{A'}$. De même que $\mathrm{B} \neq \mathrm{B}'$. On a de plus $D_1 = (\mathrm{AA}')$ et $D_2 = (\mathrm{BB}')$.
Le point M n'appartient pas à D_1 donc les points A, A' et M ne peuvent être alignés et définissent un plan qui contient les droites D, D' et D_1.
Or, comme $\mathrm{B} \in D$, $B \in (\mathrm{AA'M})$ et comme $\mathrm{B}' \in D'$, $B' \in (\mathrm{AA'M})$ d'où $D_2 = (\mathrm{BB}')$ est aussi incluse dans $(\mathrm{AA'M})$.
On aboutit donc à une contradiction avec le fait que à D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.
Il existe donc bien au plus une droite passant par M et sécante à la fois à D_1 et D_2.

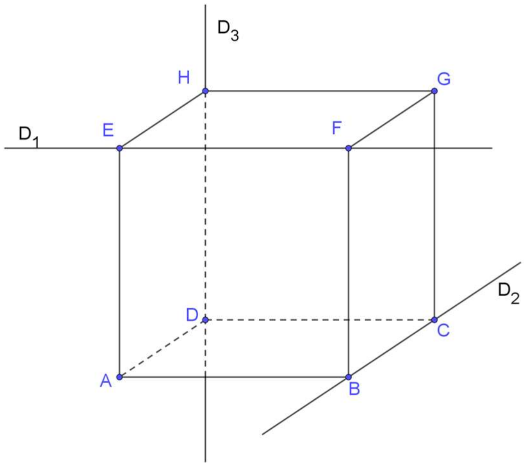
Cherchons maintenant dans quel cas il n'existe aucune droite passant par M et sécante à la fois à D_1 et D_2.
Soit P_1 le plan parallèle à D_2 et contenant D_1 et P_2 le plan parallèle à D_1 et contenant D_2. Comme D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires, toute droite incluse dans l'un ne peut pas être sécante avec une droite incluse dans l'autre.

Si M appartient à P_1, toute droite D passant par M et coupant D_1 est incluse dans P_1 et si M appartient à P_2, toute droite D passant par M et coupant D_2 est incluse dans P_2. Dans un cas comme dans l'autre, c'est-à-dire si appartient à l'union des deux plans, la droite D ne peut être sécante à la fois à D_1 et D_2.



Réciproquement, soit un point M n'appartenant à aucun des deux plans donc à aucune des droites D_1 et D_2.
Il existe alors un unique plan P passant par M et contenant D_1.
M $\notin P_1$ donc $P \neq P_1$ et P n'est pas parallèle à P_1 et donc pas parallèle à P_2 (qui est parallèle à P_1). On en déduit que P coupe P_2 suivant une droite D parallèle à D_1. Cette droite D est incluse dans P_2 comme D_2 et non parallèle à D_2 car les droites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires donc non parallèles. Les droites coplanaires et non parallèles D et D_2 sont donc sécantes en un point A.
La droite (AM) est alors sécante à la fois à D_1 et D_2.
Conclusion : il n'existe aucune droite passant par M et sécante à la fois à D_1 et D_2 si et seulement si le point M apaprtient au plan P_1 ou au plan P_2, où P_1 est le plan parallèle à D_2 et contenant D_1 et P_2 le plan parallèle à D_1 et contenant D_2.

2. Un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ appartient à la droite D_1 si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{EM}} = t\overrightarrow{\mathrm{EF}}$. En traduisant sur les coordonnées, on déduit une représentation paramétrique de la droite D_1 : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.



De même, la droite D_2 a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ et la droite D_3 a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

3. Pour tout réel t :
$t \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times t - (t + 0 + 1) + 1 = t - t - 1 + 1 = 0$ donc D_1 est incluse dans $\mathcal{S}$.
$0 \times 1 + 1 \times t + 0 \times 1 - (1 + t + 0) + 1 = t - 1 - t + 1 = 0$ donc D_2 est incluse dans $\mathcal{S}$.
$0 \times 1 + 1 \times t + t \times 0 - (0 + 1 + t) + 1 = t - 1 - T + 1 = 0$ donc D_3 est incluse dans $\mathcal{S}$.

4. Soit D une droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$. Elle admet une représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, t \in \mathbf{R}$
Un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ appartient à la fois à la droite D et à $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que
$(x_0 + ta)(y_0 + tb) + (y_0 + tb)(z_0 + tc) + (z_0 + tc)(x_0 + ta) - (x_0 + ta + y_0 + tb + z_0 + tc) + 1 = 0$
Soit $(ab + bc + ca)t^2 + (ay_0 + bx_0 + bz_0 + cy_0 + az_0 + cx_0 - a - b - c)t + x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 - x_0 - y_0 - z_0 + 1 = 0$
On n'obtient ainsi une équation d'inconnue t.
Si $ab + bc + ca \neq 0$, cette équation est du second degré et admet bien 0,1 ou 2 solutions.
Si $ab + bc + ca = 0$ et $ay_0 + bx_0 + bz_0 + cy_0 + az_0 + cx_0 - a - b - c \neq 0$, cette équation est de degré 1 et admet 1 solution.
Si $ab + bc + ca = 0$, $ay_0 + bx_0 + bz_0 + cy_0 + az_0 + cx_0 - a - b - c = 0$ et $x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 - x_0 - y_0 - z_0 + 1 \neq 0$ cette équation n'admet pas de solution.
Le cas où tous les coefficients sont nuls est exclu car D est une droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$.
Toute droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$ rencontre donc bien $\mathcal{S}$ en 0, 1 ou 2 points.

5. Les droites D_1, D_2 et D_3 ne se coupent pas deux à deux (vérification immédiate sur les représentations paramétriques et, en fait, les droites sont non coplanaires) donc si une droite D les coupe toutes les trois, c'est en trois points distincts.
D'autre part les trois droites sont incluses dans $\mathcal{S}$ donc ces points appartiennent à $\mathcal{S}$ ce qui implique que D est incluse dans $\mathcal{S}$.

6. Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2 et D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathcal{S}$.
Si une droite coupe les quatre droites D_1, D_2, D_3 et D_4, elle coupe D_1, D_2 et D_3 et est donc incluse dans $\mathcal{S}$ d'après la question **5.** et les points d'intersection obtenus sont donc des points de $\mathcal{S}$.
La droite D_4 n'est pas incluse dans $\mathcal{S}$ donc, d'après la question **4.**, D_4 rencontre $\mathcal{S}$ en 0, 1 ou 2 points.
   - Si D_4 ne rencontre pas $\mathcal{S}$, aucune droite ne peut donc couper D_1, D_2, D_3 et D_4.
   - Si D_4 rencontre $\mathcal{S}$ en 1 point M, alors le point M n'appartient ni à D_1 ni à D_2 (car D_4 ne rencontre aucune des droites D_1, D_2 et D_3) et, comme D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires, d'après la question **1.**, il existe au plus une droite passant par M et sécante à la fois à D_1 et D_2 . Si cette droite existe et coupe aussi D_3, alors elle rencontre les quatre droites en M.
   Sinon, il n'existe pas de droite rencontrant D_1, D_2, D_3 et D_4.
   On a donc au plus une droite coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.
   - Si D_4 rencontre $\mathcal{S}$ en 2 points M et N, on reprend le raisonnement précédent pour M puis pour N et on aboutit à la conclusion qu'il existe au plus une droite coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

Exercice 3 – tiré d'un problème du concours général 2015

On considère, dans l'espace, un tétraèdre $ABCD$ (non aplati).

1. ***a.*** Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
   b. Montrer que si G_A est le centre de gravité du triangle BCD, alors $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$.
   c. On appelle médiane issue d'un sommet du tétraèdre la droite reliant ce sommet au centre de gravité de la face opposée au sommet. Montrer que les médianes du tétraèdre sont concourantes au point G.
2. Montrer qu'il existe une unique sphère passant par A, B, C et D. On l'appelle sphère *circonscrite* au tétraèdre et on note O son centre.
3. On appelle *hauteur* issue d'un sommet la droite passant par ce sommet et orthogonale au plan de la face opposée à ce sommet. On dit qu'un tétraèdre est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si tétraèdre est régulier ?

1. ***a.*** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
Soit $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. Le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ étant fixés, il existe bien un unique point G vérifiant l'égalité vectorielle donnée.
   b. Soit I le milieu de $[CD]$ alors $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$ et le centre de gravité G_A du triangle BCD est défini par $\overrightarrow{BG_A}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$, ce qui s'écrit $-3\overrightarrow{G_AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$ soit $-3\overrightarrow{G_AB}=\overrightarrow{BG_A}+\overrightarrow{G_AC}+\overrightarrow{BG_A}+\overrightarrow{G_AD}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{G_AB}+\overrightarrow{G_AC}+\overrightarrow{G_AD}=\vec{0}$.
   On en déduit que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ équivaut à
   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GG_A}+\overrightarrow{G_AB}+\overrightarrow{GG_A}+\overrightarrow{G_AC}+\overrightarrow{GG_A}+\overrightarrow{G_AD}=\vec{0}$ soit $\overrightarrow{GA}++3\overrightarrow{GG_A}+\overrightarrow{G_AB}+\overrightarrow{G_AC}+\overrightarrow{G_AD}=\vec{0}$
   Soit $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_A}=\vec{0}$ soit $4\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AG_A}=\vec{0}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$.
   c. On démontrerait de même que si G_B, G_C et G_D sont les centres de gravité respectifs des triangles CDA, DAB et ABC alors $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_B}$, $\overrightarrow{CG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG_C}$ et $\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_D}$. Ces égalités impliquent l'appartenance de G aux droites $(AG_A),(BG_B),(CG_C),(DG_D)$ et le fait que les quatre médianes du tétraèdre sont concourantes.
2. Chercher s'il existe une sphère passant par les quatre sommets du tétraèdre revient à chercher s'il existe un point M situé à égale distance de ces sommets.
Considérons le plan P_{AB} perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de P_{AB} (on l'appelle plan médiateur de $[AB]$). On montre facilement que ce plan est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points A et B. On considère de même les plans P_{AB}, P_{AC} et P_{AD} les plans médiateurs respectivement de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Si la sphère existe son centre doit appartenir aux trois plans P_{AB}, P_{AC} et P_{AD}.
P_{AB} coupe le plan (ABC) suivant la médiatrice Δ_{AB} de $[AB]$. De même, P_{AC} coupe le plan (ABC) suivant la médiatrice Δ_{AC} de $[AC]$
Les droites (AB) et (AC) n'étant pas parallèles, les plans P_{AB} et P_{AC} (qui leur sont perpendiculaires) ne sont pas parallèles. Ils se coupent donc suivant une droite $\mathcal{D}$.

Comme $P_{AB} \cap (ABC) = \Delta_{AB}$ et $P_{AC} \cap (ABC) = \Delta_{AC}$, $P_{AB} \cap P_{AC} \cap (ABC) = \Delta_{AB} \cap \Delta_{AC}$ c'est-à-dire, la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) au centre du cercle O circonscrit eu triangle ABC.
On sait que $(AB) \perp P_{AB}$ et $\mathcal{D} \subset P_{AB}$ donc $(AB) \perp \mathcal{D}$ et on démontre de même que $(AC) \perp \mathcal{D}$. Comme (AB) et (AC) sont sécantes dans (ABC), on en déduit que $\mathcal{D} \perp (ABC)$.
On en déduit que $\mathcal{D}$ ne peut être parallèle à P_{AD} car si c'était le cas, elle serait orthogonale à la fois à (AD) et à (ABC), ce qui contredirait le fait que le tétraèdre n'est pas aplati. Donc $\mathcal{D}$ est sécante à P_{AD} en un point O.
Et $P_{AB} \cap P_{AC} \cap P_{AD} = \{O\}$ avec $OA = OB = OC = OD$.
Le tétraèdre $ABCD$ admet donc bien une unique sphère passant par ses sommets.
Remarques :

- *Le centre a été obtenu avec trois plans médiateurs mais le tétraèdre a six arêtes et le raisonnement aurait pu être mené avec trois autres plans médiateurs. Les six plans médiateurs passent donc tous par le point O.*
- *Tout point de $\mathcal{D}$ est équidistant de A, B et C donc appartient à $P_{AB} \cap P_{AC} \cap P_{BC}$ et réciproquement. On pourrait faire le même raisonnement avec les plans (ABD), (ACD) et (BCD) associés aux autres faces du tétraèdre et les droites correspondantes que nous noterons respectivement $\mathcal{D}_{ABD}, \mathcal{D}_{ACD}, \mathcal{D}_{BCD}$.*

3. a. Si le tétraèdre est régulier, alors $DA = DB = DC$ donc, avec les notations précédentes, $D \in \mathcal{D}$. Comme de plus $\mathcal{D} \perp (ABC)$, $\mathcal{D}$ est la hauteur du tétraèdre issue de D. On démontrerait de même que $\mathcal{D}_{ABD}, \mathcal{D}_{ACD}, \mathcal{D}_{BCD}$ sont les hauteurs issues respectivement de C, B et A.
Ces droites ainsi que la droite D ont un point commun qui est le point d'intersection des 6 plans médiateurs, c'est-à-dire le point O, centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.
Réciproquement si les hauteurs du tétraèdre sont concourantes en O alors la hauteur (OD) est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ car elles sont toutes les deux perpendiculaires au plan (ABC). Comme D appartient à ces deux droites, elles sont confondues.
Montrons que $DA = DB$.
Soit H le point d'intersection de $\mathcal{D} = (OD)$ avec (ABC) et soit I le milieu de $[AB]$.
Comme $\mathcal{D} \subset P_{AB}$, Het I appartiennent à P_{AB} donc (HI) est perpendiculaire à (AB) et, dans le triangle AIH rectangle en I, $AH^2 = AI^2 + IH^2$.
Comme $\mathcal{D} \perp (ABC)$, $\mathcal{D} = (DH)$ est perpendiculaire à toute droite de (ABC) donc à (HI) et dans le triangle DIH rectangle en H, $DI^2 = DH^2 + HI^2$.
On en déduit $AI^2 + ID^2 = AH^2 - IH^2 + DH^2 + HI^2 = AH^2 + DH^2$.
D'autre part $\mathcal{D} = (DH)$ est perpendiculaire à toute droite de (ABC) donc à (AH) et dans le triangle DAH rectangle en H, $DA^2 = DH^2 + HA^2$. On a donc $DA^2 = AI^2 + ID^2$et on en déduit que le triangle ADI est rectangle en I, ce qui signifie que I est à la fois milieu de $[AB]$ et pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD. Ce triangle est donc isocèle en D et $DA = DB$.
En raisonnant de même à l'aide du milieu de $[CB]$, on montre que $DC = DB$ puis en changeant de sommet du tétraèdre, on aboutit à $DA = DB = DC = AC$ et conclure que le tétraèdre est régulier.
On peut donc dire que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier.

Remarque : on montre aussi que :

- *les hauteurs sont elles aussi nécessairement concourantes ;*
- *les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier ;*

Exercice 4 – tiré d'un problème du concours général 2005
On admet que :

- la composée $s' \circ s$ de deux symétries axiales s et s' d'axes sécants en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ est la rotation de centre I et d'angle $2\left(\vec{u}, \vec{u'}\right)$.
- Si r est la rotation de centre O et d'angle α et si M' est l'image d'un point M distinct de O alors $z_{M'} = z_M e^{i\alpha}$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ a pour affixe 1 et $\vec{v}$ a pour affixe i, on considère le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit O, A, B, et C les points d'affixes respectives 0, 1, j et j^2.
On désigne par s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales par rapport respectivement aux droites (OA), (OB) et (OC).
Soit M un point du plan d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbf{R}$.

1. On note $\mathrm{M}_1 = s_1(\mathrm{M}), \mathrm{M}_2 = s_2(\mathrm{M}), \mathrm{M}_3 = s_3(\mathrm{M})$. Montrer que les points $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ ont pour affixes respectives $\bar{z}, j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

2. Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC). Montrer que le point J d'affixe $-\frac{1}{2}$ est le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4]$.

3. ***a.*** A quelle condition nécessaire et suffisante les points M_2, M_3 et M_4 sont-ils alignés ?

On suppose désormais que les points M_2, M_3 et M_4 ne sont pas alignés et on note Ω le centre du cercle circonscrit à $M_2M_3M_4$.

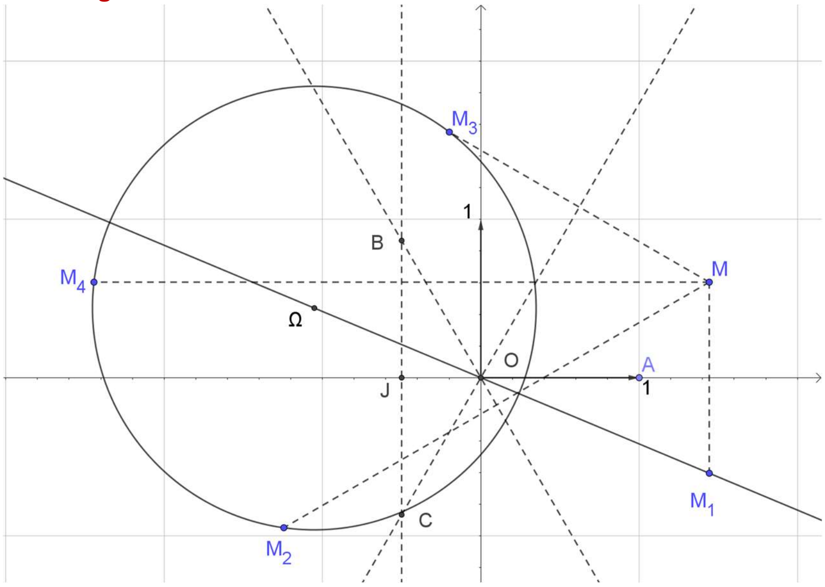
b. Justifier le fait que Ω appartient à la droite (OM_1). Dans la suite, on note son affixe $z_\Omega = \lambda \mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.

c. Montrer que $\lambda = -\frac{1+2\rho\cos\theta}{\rho+2\cos\theta}$.

d. En déduire une expression du rayon R, du cercle circonscrit au triangle $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$.

e. Montrer que ce rayon est égal à 1 si et seulement si « $\rho = 1$ ou $(\rho + 2\cos\theta)^2 = 1 - 3(\cos\theta)^2$ ».

On commence par faire une figure.



Montrons déjà que le triangle ABC est équilatéral.

Comme $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, $j^3 = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1$. Comme de plus $j^3 - 1 = (j-1)(j^2+j+1)$ et $j \neq 1$, on en déduit que $j^2 + j + 1 = 0$.

De plus, $\bar{j} = j^3\bar{j} = j^2 j\bar{j} = j^2$ car $|j| = 1$.

On en déduit $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{j^2-1}{j-1} = j + 1 = -j^2 = -\bar{j} = \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ ce qui signifie que $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \left|\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}\right| = 1$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

De plus, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$ donc O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

1. Comme (OA) est l'axe des abscisses, l'affixe z_1 de M_1 est le conjugué de l'affixe de M donc $z_1 = \bar{z}$.
$\mathrm{M}_1 = s_1(\mathrm{M})$ ce qui s'écrit aussi $\mathrm{M} = s_1(\mathrm{M}_1)$ d'où $\mathrm{M}_2 = s_2(\mathrm{M}) = s_2 \circ s_1(\mathrm{M}_1)$. Or $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{4\pi}{3}$ donc l'affixe de M_2 est $z_2 = z_1\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}} = \bar{z}j^2$.
$\mathrm{M}_3 = s_3(\mathrm{M}) = s_3 \circ s_1(\mathrm{M}_1)$. Or $s_3 \circ s_1$ est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \frac{-4\pi}{3}$ soit $\frac{2i\pi}{3}$ donc l'affixe de M_3 est $z_3 = z_1\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = \bar{z}j$.

2. De même, si s_4 désigne la symétrie d'axe (BC), $\mathrm{M}_4 = s_4(\mathrm{M}) = s_4 \circ s_1(\mathrm{M}_1)$. Or (BC) et (OA) sont sécantes en J (car B et C ont même abscisse $-\frac{1}{2}$ et tout point de (OA) a pour ordonnée 0) donc $s_4 \circ s_1$est la rotation de centre J et d'angle $2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$. Comme $\frac{z_C - z_B}{z_A} = -i\sqrt{3}$, $2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$, $s_4 \circ s_1$est la rotation de centre J et d'angle $-\pi$ c'est-à-dire la symétrie de centre J donc le point J est le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4]$.
En particulier, l'affixe z_4 de M_4 est telle que $z_1 + z_4 = -1$ soit $z_4 = -1 - \bar{z}$.

3. ***a.*** Comme M et O sont distincts, les points M, M_1, M_2, M_3 et M_4 et les points M_2, M_3 et M_4sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}, \overrightarrow{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_4}\right)$ est l'angle nul ou un angle plat, ce qui revient à dire que $\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}$ est un réel ce qui équivaut à dire que $\overline{\left(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}\right)} = \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}$.

Or $\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}=\frac{-1-\bar{z}-\bar{z}j^2}{\bar{z}j-\bar{z}j^2}=\frac{-1+\bar{z}j}{\bar{z}j-\bar{z}j^2}=\frac{-1+\bar{z}j}{\bar{z}(j-j^2)}$ car $j^2+j+1=0$ donc $\overline{\left(\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}\right)}=\frac{-1+z\bar{j}}{z(\bar{j}-\overline{(j^2)})}$.
Or $\bar{j}-\overline{(j^2)}=j^2-j^4=j^2-j$ car $j^3=1$.
Donc M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $(-1+\bar{z}j)z(j^2-j)=\bar{z}(j-j^2)\,(-1+z\bar{j})$
Soit, puisque $j-j^2\neq 0$, et $j-j^2=-(j^2-j)$, $(-1+\bar{z}j)z=-\bar{z}\,(1-z\bar{j})$ soit $z\bar{z}(j+\bar{j})=z+\bar{z}$
On pose $z=x+iy$, où x et y sont des réels.
Comme $j+\bar{j}=-1$, les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $-(x^2+y^2)=2y$
soit $x^2+y^2+2y=0$ soit $x^2+(y+1)^2=1$ c'est-à-dire le point M appartient au cercle Γ de centre $\mathrm{D}(-1{,}0)$ et de rayon 1.

b. Le point Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$. Ce point est le point de concours des médiatrices des côtés de $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$. Montrons que, comme le suggère la figure, la droite (OM_1) est la médiatrice de $[\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3]$ (O et M sont distinct donc O et M_1 le sont aussi).
$\mathrm{OM}_2=|z_2|=|\bar{z}j^2|=|\bar{z}||j^2|=|z||j|^2=|z|$ et $\mathrm{OM}_3=|z_3|=|\bar{z}j|=|z||j|=|z|$ donc $\mathrm{OM}_2=\mathrm{OM}_3$
$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=|z_2-z_1|=|\bar{z}j^2-\bar{z}|=|\bar{z}||j^2-1|=|\bar{z}||j+1||j-1|=|\bar{z}||j-1|$
et $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3=|z_3-z_1|=|\bar{z}j-\bar{z}|=|\bar{z}||j-1|$ donc $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3$.
Les points O et M_1 sont donc équidistants de M_2 et M_3 d'où la droite (OM_1) est la médiatrice de $[\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3]$ et le point Ω appartient bien à (OM_1).

c. La notation $z_\Omega=\lambda\mathrm{e}^{-i\theta}$ est légitime d'après le résultat de la question précédente mais le signe de λ n'est pas fixé puisque z_Ω a même argument, à π près que z_1. D'autre part, $z=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$.
Par définition de Ω, on doit avoir $\Omega\mathrm{M}_3=\Omega\mathrm{M}_4$.
Or $\Omega\mathrm{M}_3=|z_3-z_\Omega|=\left|\bar{z}j-\lambda\mathrm{e}^{-i\theta}\right|=\left|j\rho\mathrm{e}^{-i\theta}-\lambda\mathrm{e}^{-i\theta}\right|=\left|\mathrm{e}^{-i\theta}\right||j\rho-\lambda|=|j\rho-\lambda|$
Et $\Omega\mathrm{M}_4=|z_4-z_\Omega|=\left|-1-\bar{z}-\lambda\mathrm{e}^{-i\theta}\right|=\left|1+\rho\mathrm{e}^{-i\theta}-\lambda\mathrm{e}^{-i\theta}\right|=\left|\mathrm{e}^{-i\theta}\right|\left|\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right|=\left|\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right|$
$\Omega\mathrm{M}_3=\Omega\mathrm{M}_4$ équivaut donc successivement à :
$\Omega{\mathrm{M}_3}^2=\Omega{\mathrm{M}_4}^2$
$(j\rho-\lambda)\overline{(j\rho-\lambda)}=\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right)\overline{\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right)}$
$(j\rho-\lambda)(\bar{j}\rho-\lambda)=\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta}+\rho+\lambda\right)$
$j\bar{j}\rho^2-\lambda\,\rho(j+\bar{j})+\lambda^2=\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta}+\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}\right)(\rho+\lambda)+(\rho+\lambda)^2$
$\rho^2+\lambda^2+\lambda\,\rho=1+2\,(\rho+\lambda)\cos\theta+\rho^2+2\lambda\rho+\lambda^2$ car $j+\bar{j}=-1$
$\lambda\,\rho=1+2\,(\rho+\lambda)\cos\theta+2\lambda\rho$
$\lambda(2\cos\theta+\rho)=-1-2\rho\cos\theta$
On a donc bien $\lambda=-\frac{1+2\rho\cos\theta}{2\cos\theta+\rho}$.

d. Le rayon R est la distance de Ω à l'un quelconque des points $\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3,\mathrm{M}_4$. Calculons $R^2={\mathrm{OM}_4}^2$.
$R^2=\left|\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right|^2=\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\rho+\lambda\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta}+\rho+\lambda\right)$
Soit $R^2=\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\rho-\frac{1+2\rho\cos\theta}{2\cos\theta+\rho}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta}+\rho-\frac{1+2\rho\cos\theta}{2\cos\theta+\rho}\right)$ soit après réduction au même dénominateur, et simplification :
$R^2=\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\frac{\rho^2-1}{2\cos\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta}+\frac{\rho^2-1}{2\cos\theta+\rho}\right)=1+\frac{\rho^2-1}{2\cos\theta+\rho}\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}\right)+\left(\frac{\rho^2-1}{2\cos\theta+\rho}\right)^2$
$R^2=1+\frac{\rho^2-1}{2\cos\theta+\rho}\times 2\cos\theta+\left(\frac{\rho^2-1}{2\cos\theta+\rho}\right)^2=1+\frac{(\rho^2-1)}{(2\cos\theta+\rho)^2}\left(2\cos\theta\,(2\cos\theta+\rho)+\rho^2-1\right)$

Soit $R^2=1+\frac{(\rho^2-1)}{(2\cos\theta\quad)^2}\left((2\cos\theta+\rho)^2+3\cos^2\theta-1\right)$
et $R=\sqrt{1+\frac{(\rho^2-1)}{(2\cos\theta+\rho)^2}\left((2\cos\theta+\rho)^2+3\cos^2\theta-1\right)}$.

e. $R=1$ si et seulement si $R^2=1$ soit ρ^2-1 ou $(2\cos\theta+\rho)^2+3\cos^2\theta-1=0$
Soit, puisque $\rho>0$, $\rho=1$ ou $(2\cos\theta+\rho)^2=1-3\cos^2\theta$.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1

Albert et Béatrice jouent à un jeu. On a posé 2021 cailloux sur une table. En alternance et en commençant par Albert, ils vont retirer un certain nombre de cailloux de la table en respectant la règle suivante. Si $n \geq 1$, au $n^{ème}$ tour, le joueur dont c'est le tour, c'est-à-dire Albert si n est impair et Béatrice si n est pair, peut retirer un nombre de cailloux entre 1 et n. Au premier tour, Albert doit donc retirer 1 caillou ; au deuxième tour, Béatrice peut retirer 1 ou 2 cailloux ; au troisième tour, Albert peut en retirer 1, 2 ou 3, et ainsi de suite. Celui qui retire le dernier caillou de la table perd la partie. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie pour gagner à coup sûr.

Albert puis Béatrice jouent chacun leur tour en commençant par Albert. On regroupe par deux les tours. Il s'agit en tout d'avoir un nombre $2r+1$ de tours où r est à déterminer (et en faisant en sorte qu'au dernier tour, le tour $2r+1$, il n'y ait qu'un seul caillou).

Soit k un naturel tel que $1 \leq k \leq r$. Au tour $2k-1$, Albert peut enlever un nombre de cailloux compris entre 1 et $2k-1$ et au tour $2k$, Béatrice peut enlever un nombre de cailloux compris entre 1 et $2k$. En utilisant une stratégie de complément, Béatrice peut faire en sorte que le nombre de cailloux enlevés pendant les deux tours $2k-1$ et $2k$ soit exactement $2k+1$ (en effet, si Albert enlève 1 caillou alors elle en enlève $2k$, …, si Albert enlève $2k-1$ cailloux alors elle est enlève 2). $2k-1$ est le plus grand nombre de cailloux qui peut être enlevé de façon certaine au cours de l'union des tours $2k-1$ et $2k$, avec la stratégie de complément utilisé par Béatrice, et ce quel que soit le nombre de cailloux enlevés par Albert au tour $2k-1$.

Ainsi, du tour 1 au tour $2r$, le nombre total de cailloux enlevés est :

$$\sum_{k=1}^{k=r}(2k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{k=r}k\right) + r = 2\frac{r\times(r+1)}{2} + r = r(r+2)$$

Ce nombre total de cailloux enlevés du tour 1 au tour $2r$ doit être égal à 2020.

Or, $\sqrt{2021} \approx 44{,}96$

On regarde le nombre de cailloux enlevés, en appliquant cette stratégie, du tour 1 au tour 88 (soit $r = 44$) :

$$\sum_{k=1}^{k=44}(2k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{k=44}k\right) + 44 = 2\frac{44\times 45}{2} + 44 = 44\times 46 = 2024$$

Il y a 4 cailloux enlevés en trop.

$$\sum_{k=1}^{k=40}(2k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{k=40}k\right) + 40 = 2\frac{40\times 41}{2} + 40 = 40\times 42 = 1680$$

Puis, Béatrice applique le complément à $2r$ aux tours $2r$ où $41 \leq r \leq 44$. Elle s'assure ainsi que $2(41+42+43+44) = 340$ cailloux supplémentaires sont retirés de la table.

Donc, Béatrice s'assure ainsi que, à la fin du tour 88, il reste $2021 - 1680 - 340 = 1$ caillou sur la table.

Finalement, Albert, qui doit jouer au tour 89, perd la partie.

Exercice 2 – tiré du concours général 2014

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » dans un lancer est notée p avec $0 < p < 1$.

Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi, si un joueur obtient « pile » au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer ; s'il obtient « pile » au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1 ; s'il obtient « pile » au $n^{\text{ième}}$ (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas « pile » durant les n lancers, son score est n.

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1. Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

1. De façon classique, on note, pour un lancer : S le score d'un joueur, P : « le joueur obtient « pile », F : « le joueur obtient « face » et $p = p(P)$. On a alors $p(F) = 1 - p$.

Comme les lancers successifs sont indépendants :

- $p(S=n)=p(\underbrace{FFF\dots FF}_{n\,fois})=(1-p)^n$
- Si $1\le m<n$, alors $p(S=k)=p(\underbrace{FFF\dots F}_{m\,fois}P)=p(1-p)^m$.

2. Si on note U l'événement « il y a un unique gagnant » et, pour tout entier i, $1\le i\le n-1$, U_i l'événement « il y a un unique gagnant et son score vaut i », les U_i forment une partition de U donc $p(U)=\sum_{i=1}^{i=n-1}p(U_i)$.
Si, de plus, on note pour tout entier i, $1\le i\le n-1$ et tout entier j, $1\le j\le k$, $U_{i,j}$ l'événement « le joueur j est l'unique gagnant et son score vaut i », comme les joueurs jouent des rôles identiques, $p(U_{i,j})=p(U_{i,1})$.
On va donc calculer $p(U_{i,1})$.
$U_{i,1}$ correspond à l'événement « le joueur 1 est l'unique gagnant et son score vaut i » soit « le score du joueur 1 vaut i et le score de chacun des autres joueurs est strictement supérieur à i » .
Soit S_j le score du joueur j,
$p(U_{i,1})=p((S_1=i)\cap(S_2>i)\cap\dots\cap(S_k>i))$
Comme les lancers des joueurs sont indépendants, $p(U_{i,1})=p(S_1=i)\times p(S_2>i)\times\dots\times p(S_k>i)$.
Or les variables aléatoires S_j suivent la même loi de probabilité que celle de la question **1.** donc
$p(U_{i,1})=p(S=i)(p(S>i))^{k-1}$.

- $p(S>n-1)=p(S=n)=(1-p)^n$
- Si $i<n-1$, $p(S>i)=p(S=i+1)+p(S=i+2)+\dots+p(S=n)$

Soit $p(S>i)=p(1-p)^{i+1}+p(1-p)^{i+2}+\dots+p(1-p)^{n-1}+(1-p)^n$.
Soit $p(S>i)=p(1-p)^{i+1}\left[1+(1-p)+(1-p)^2+\dots+(1-p)^{n-i-2}\right]+(1-p)^n$
Soit $p(S>i)=p(1-p)^{i+1}\times\frac{1-(1-p)^{n-i-1}}{1-(1-p)}+(1-p)^n=(1-p)^{i+1}\left[1-(1-p)^{n-i-1}\right]+(1-p)^n$
Soit $p(S>i)=(1-p)^{i+1}-(1-p)^{i+1+n-i-1}+(1-p)^n=(1-p)^{i+1}-(1-p)^n+(1-p)^n$
Soit $p(S>i)=(1-p)^{i+1}$.
On en déduit que
$p(U_{i,1})=p(S=i)(p(S>i))^{k-1}=p(1-p)^i\times\left((1-p)^{i+1}\right)^{k-1}=p(1-p)^{ki+k-1}$
et $p(U_i)=\sum_{j=1}^{j=k}p(U_{i,j})=kp(U_{i,1})=kp(1-p)^{ki+k-1}$.
D'où $p(U)=\sum_{i=1}^{i=n-1}p(U_i)=\sum_{i=1}^{i=n-1}kp(1-p)^{ki+k-1}=kp\,(1-p)^{k-1}\sum_{i=1}^{i=n-1}(1-p)^{ki}$
Soit $p(U)=\sum_{i=1}^{i=n-1}kp(1-p)^{ki+k-1}=kp\,(1-p)^{k-1}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left((1-p)^k\right)^i$
Soit, en posant $j=i-1$,
$p(U)=kp(1-p)^{2k-1}\sum_{j=0}^{j=n-2}\left((1-p)^k\right)^j=kp(1-p)^{2k-1}\left[1+(1-p)^k+\dots+\left((1-p)^k\right)^{n-2}\right]$
Soit $p(U)=\ kp(1-p)^{2k-1}\times\frac{1-\left((1-p)^k\right)^{n-1}}{1-(1-p)^k}=kp(1-p)^{2k-1}\times\frac{1-(1-p)^{k(n-1)}}{1-(1-p)^k}$.
Comme $0<p<1$, $0<1-p<1$ et $\lim_{n\to\infty}(1-p)^{k(n-1)}=0$ et et $\lim_{n\to\infty}\left(1-(1-p)^{k(n-1)}\right)=1$
d'où $\lim_{n\to\infty}p(U)=\frac{kp(1-p)^{2k-1}}{1-(1-p)^k}$

Exercice 3 – tiré du concours général 2019

1. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes *A*, *B* et *C* qui contiennent chacune quatre jetons indiscernables au toucher. Les jetons de *A* portent les numéros 12, 10, 3 et 1, ceux de *B* portent les numéros 9, 8, 7 et 2, et ceux de *C* portent les numéros 11, 6, 5 et 4.
On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans *A*, *B* et *C*.
Montrer que $P(X_A>X_B)=\frac{9}{16}$ et que $P(X_B>X_C)=\frac{9}{16}$. Que vaut $P(X_C>X_A)$?

2. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois dés cubiques et équilibrés D_1, D_2 et D_3.
Les faces de D_1 portent les numéros 6, 3, 3, 3, 3, celles de D_2 portent les numéros 5, 5, 5, 2, 2, 2, et celles de D_3 portent les numéros 4,4,4, 4, 4, 1.

a. On lance indépendamment chacun de ces trois dés et on note respectivement X_1, X_2 et X_3 les numéros indiqués par la face supérieure des dés D_1, D_2 et D_3.

Calculer les trois probabilités $P(X_1 > X_2), P(X_2 > X_3)$ et $P(X_3 > X_1)$.

b. Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne.
Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

c. Finalement, il est décidé que c'est Paul qui choisit en premier. Quel(s) dé(s) a-t-il intérêt à choisir ?

d. Claire et Paul décident alors de modifier les règles. L'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé deux fois de suite et celui dont la somme des numéros est la plus grande gagne.
Paul choisit en premier et il prend le dé *D*2. Quel dé Claire a-t-elle intérêt à choisir ?
De façon générale, avec ces nouvelles règles, Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

1. Les jetons de *A* portent les numéros 12, 10, 3 et 1, ceux de *B* portent les numéros 9, 8, 7 et 2, ce qui donne 16 couples (X_A, X_B) possibles. Ceux réalisant $X_A > X_B$ sont les 9 couples (12,9), (12,8), (12,7), (12,2), (10,9), (10,8), (10,7), (10,2), (3,2). Les jetons étants indiscernables au toucher, ce qui assure l'équiprobabilité des tirages et les tirages dans les deux urnes étant indépendants, la probabilité chaque couple est $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ et on a bien $P(X_A > X_B) = \frac{9}{16}$.
On montre de même que $(X_B > X_C) = \frac{9}{16}$ puisqu'il y 9 couples réalisant $X_B > X_C$: les couples dont le premier terme est 9, 8 ou 7 et le deuxième est 6, 5 ou 4.
De même $P(X_C > X_A) = \frac{9}{16}$ avec les couples (11,10), (11,3), (11,1), (6,3), (6,1), (5,3), (5,1), (4,3), (4,1).

2. ***a.*** Les dés sont équilibrés, ce qui assure l'équiprobabilité. Les lois de probabilité des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont données par :
$p(X_1 = 6) = \frac{1}{6}$ et $p(X_1 = 3) = \frac{5}{6}$, $p(X_2 = 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p(X_2 = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$p(X_3 = 4) = \frac{5}{6}$ et $p(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$.
Les trois dés sont lancés indépendamment chacun des deux autres, donc :
Comme $X_1 > X_2$ est réalisé soit lorsque « $X_1 = 6$ » soit lorsque « $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$ »,
$P(X_1 > X_2) = p(X_1 = 6) + p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$
De même $X_2 > X_3$ est réalisé soit lorsque « $X_2 = 5$ » soit lorsque « $X_2 = 2$ et $X_3 = 1$ »,
$P(X_2 > X_3) = p(X_2 = 5) + p(X_2 = 2) \times p(X_3 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$
Et $X_3 > X_1$ est réalisé uniquement lorsque « $X_1 = 3$ et $X_3 = 4$ »,
$P(X_3 > X_1) = p(X_1 = 3) \times p(X_3 = 4) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

b. Claire a intérêt à laisser Paul choisir son dé car, dans ce cas et en s'appuyant sur la question précédente :
Soit Paul choisit D_1 et alors Claire choisit D_3.
Soit Paul choisit D_2 et alors Claire choisit D_1.
Soit Paul choisit D_3 et alors Claire choisit D_2.
Dans tous les cas, la probabilité que Claire gagne est supérieure à $\frac{1}{2}$.

c. Si Paul choisit D_2 alors, soit Claire choisira D_1 et $P(X_1 < X_2) = \frac{5}{12}$ soit elle choisira D_3 et $P(X_3 < X_2) = \frac{7}{12}$.
La moyenne des deux probabilités est $\frac{1}{2}$.
Si Paul choisit D_1 alors, soit Claire choisira D_2 et $P(X_2 < X_1) = \frac{7}{12}$ soit elle choisira D_3 et $P(X_3 < X_1) = \frac{11}{36}$.
La moyenne des deux probabilités est égale à $\frac{4}{9}$.
Or $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$. Donc Paul a intérêt à choisir D_2.

d. On note respectivement S_1, S_2, S_3 la somme des numéros obtenus en lançant deux fois de suite les dés D_1, D_2 et D_3. Les lois de probabilités de ces variables aléatoires sont données par :
$p(S_1 = 6) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, $p(S_1 = 9) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$ (obtenu avec les deux couples (6,3) et (3,6)) et $p(S_1 = 12) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

$p(S_2=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}, p(S_2=7)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (obtenu avec les deux couples (5,2) et (2,5)) et $p(S_2=10)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.
$p(S_3=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}, p(S_3=5)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{36}$ (obtenu avec les deux couples (4,1) et (1,4)) et $p(S_3=8)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.
Si Paul choisit en premier et choisit D_2. Pour savoir quel dé Claire a intérêt à choisir, on va calculer $p(S_1>S_2)$ et $p(S_3>S_2)$.
$S_1>S_2$ est réalisé lorsque « $S_1=12$ » ou bien « $S_1=9$ et S_2 vaut 4 ou 7 » ou bien « $S_1=6$ et $S_2=4$ » donc $p(S_1>S_2)=\frac{1}{36}+\frac{10}{36}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{25}{36}\times\frac{1}{4}=\frac{59}{144}$.
De même, $S_3>S_2$ est réalisé lorsque « $S_3=8$ et S_2 vaut 4 ou 7 » ou bien « $S_3=5$ et $S_2=4$ » donc $p(S_3>S_2)=\frac{25}{36}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{10}{36}\times\frac{1}{4}=\frac{85}{144}$ et $\frac{85}{144}>\frac{59}{144}$.
Si Paul choisit D_2 en premier, Claire a donc intérêt à choisir D_3, ce qui peut paraitre étrange puisque dans la question précédente c'est D_1qu'elle avait intérêt à choisir.
On calcule de même $p(S_3>S_1)=p(S_3=8\ et\ S_1=6)=\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}=\frac{625}{1296}$
et $p(S_2>S_1)=1-\ p(S_1>S_2)=\frac{85}{144}$. Comme $\frac{85}{144}>\frac{625}{1296}$, si Paul choisit D_1 en premier alors Claire a intérêt à choisir D_2.
Enfin, $p(S_2>S_3)=1-p(S_3>S_2)=\frac{59}{144}$ et $p(S_3>S_1)=p(S_3=8$ et $S_1=6)=\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}=\frac{625}{1296}$ d'où $p(S_1>S_3)=1-p(S_3>S_1)=\frac{671}{1296}$. Comme $\frac{59}{144}>\frac{671}{1296}$, si Paul choisit D_3 en premier alors Claire a intérêt à choisir D_1.

Exercice 4
Soit $n\geq 100$ un entier. Clara écrit les nombres $n, n+1, \dots, 2n$ sur des cartes distinctes. Elle mélange ensuite les $n+1$ cartes, puis les sépare en deux piles.
Montrer qu'au moins l'une des piles contient deux cartes pour lesquelles la somme des nombres est un carré parfait.

On cherche à appliquer le principe des tiroirs en trouvant trois entiers a, b et c appartenant à $\{n, n+1, \dots, 2n\}$ tels que les sommes $a+b$, $b+c$ et $c+a$ soient des carrés parfaits.
Comme ces trois sommes doivent de plus appartenir à un intervalle pas très grand, on cherche en fait un entier k tel que $a+b=(k-1)^2, b+c=k^2, c+a=(k+1)^2$.
On a alors :
$2(a+b+c)=(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=3k^2+2$ qui implique k^2 est pair et donc k est pair. On cherche donc un entier l tel que $\begin{cases} a+b=(2l-1)^2 & (1)\\ b+c=(2l)^2 & (2)\\ c+a=(2l+1)^2 & (3)\end{cases}$ soit $\begin{cases}(1)+(3)-(2)\\(2)+(1)-(3)\\(3)+(2)-(1)\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a=2l^2+1\\ b=2l^2-4l\\ c=2l^2+4l\end{cases}$.
On est ramené à chercher un entier l tel que $n\leq 2l^2-4l\leq 2l^2+1\leq 2l^2+4l\leq 2n$ c'est-à-dire $l\geq 1$ tel que $l^2+2l\leq n\leq 2l^2-4l$.
Pour $n=100$, $l=9$ convient.
Pour tout entier $l\geq 9$, on pose $a_l=l^2+2l$, $b_l=2l^2-4l$ et E_l l'ensemble des entiers k tels que $a_l\leq k\leq b_l$.
Comme $b_l-a_{l+1}=2l^2-4l-l^2-2l-1-2l-2=l^2-8l-3$ et que les racines de l^2-8l-3 sont inférieures à 9, $b_l-a_{l+1}\geq 0$. On a donc $a_l\leq a_{l+1}\leq b_l$ et l'intersection des ensembles E_l et E_{l+1} est non vide.
Or $a_9=99$ et b_l tend vers $+\infty$ quand l tend vers $+\infty$, pour tout $n\geq 99$, il existe un entier $l\geq 9$ tel que $n\in E_l$.