Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

Éléments de solution fiche numéro 4

Exercice 4. 1 Une fraction irréductible

Les entiers strictement positifs a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1.
Sachant que a et b ont une différence de 15 et que $\frac{5}{9} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$, quelle est la valeur de $\frac{a}{b}$?

$\frac{a}{b} < \frac{4}{7}$ donc $\frac{a}{b} < 1$ et comme a et b sont strictement positifs $a < b$ et, comme a et b ont une différence de 15, $b = a + 15$.
On a donc $\frac{5}{9} < \frac{a}{a+15} < \frac{4}{7}$.
L'inégalité $\frac{5}{9} < \frac{a}{a+15}$ équivaut, en multipliant les deux membres de l'inégalité par $9(a + 15)$ qui est strictement positif, $5a + 75 < 9a$ soit $> \frac{75}{4}$. Comme a est un entier cela signifie que $a \geq 19$.
L'inégalité $\frac{a}{a+15} < \frac{4}{7}$ équivaut, en multipliant les deux membres de l'inégalité par $7(a + 15)$ qui est strictement positif, $7a < 4a + 60$ soit $a < 20$, c'est-à-dire, puisque a est un entier, $a = 19$.
On en tire $b = 34$ et $\frac{a}{b} = \frac{19}{34}$.

Exercice 4. 2 Cours moyen

Eva s'amuse à écrire sur son tableau la suite des entiers naturels à partir de 1 et jusqu'à un certain nombre n.
Elle en a oublié un…
La moyenne des nombres écrits est 40,75.
Quel est le nombre oublié ?

La somme des nombres écrits est comprise entre $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1)$ et $S_n = 2 + 3 + 4 + \cdots + n$.
Si n est pair, la moyenne correspondant à S_1 est $\frac{n}{2}$ et celle correspondant à S_2 est $\frac{n}{2} + 1$.
Si n est impair, la moyenne correspondant à S_1 est $\frac{n}{2}$ et celle correspondant à S_2 est $\frac{n}{2} + 1$ (*je sais, c'est le même résultat, mais il faut compter sur ses doigts pour s'en apercevoir).*
D'où vient l'inégalité : $\frac{n}{2} \leq 40{,}75 \leq \frac{n}{2} + 1$ et donc $79{,}5 \leq n \leq 81{,}5$.

Cela laisse deux possibilités $n = 80$ ou $n = 81$.
Pour $n = 80$, cela fait 79 nombres entiers pour une moyenne de $40{,}75$ et la somme n'est pas entière.
Pour $n = 81$, cela fait 80 nombres entiers pour une moyenne de $40{,}75$, donc une somme de $3\,260$.

La méthode du petit Gauss donne $81 + 1 = 80 + 2 = \cdots = 41 + 41$ et donc une somme de $40 \times 82 + 41 = 3\,321$
La différence est 61, le nombre manquant.

Exercice 4. 3 Sac à chapeaux

Dans un sac, il y a des chapeaux bleus et des chapeaux verts. À chaque tour, Julie enlève un chapeau du sac, sans regarder, chaque chapeau du sac ayant la même chance d'être choisi. Si le chapeau choisi est vert, elle prend un chapeau bleu de sa réserve de chapeaux et l'ajoute au sac. Si le chapeau choisi est bleu, elle prend un chapeau vert de sa réserve et l'ajoute au sac. Au départ, le sac contient 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts.
Quelle est la probabilité qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts ?

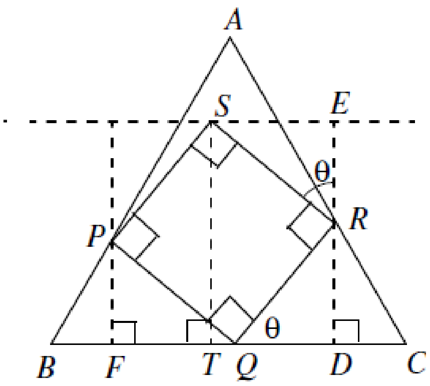
Au départ, il y a 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts dans le sac. La probabilité de choisir un chapeau vert est égale à $\frac{2}{6}$ soit $\frac{1}{3}$. Le chapeau vert serait alors remplacé par un chapeau bleu et il y aurait alors 5 chapeaux bleus et 1 chapeau vert dans le sac. Pour revenir à la situation de départ, soit 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts, il faudrait enlever un chapeau bleu et le remplacer par un chapeau vert. Puisque le sac contient 5 chapeaux bleus et 1 chapeau vert, la

probabilité de choisir un chapeau bleu est égale à $\frac{5}{6}$. Donc, la probabilité de choisir un chapeau vert, suivi d'un chapeau bleu est donc égale à $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$.
Au départ, il y a 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts dans le sac. La probabilité de choisir un chapeau bleu est donc égale à $\frac{4}{6}$ soit $\frac{2}{3}$. Le chapeau bleu serait alors remplacé par un chapeau vert et il y aurait alors 3 chapeaux bleus et 3 chapeaux verts dans le sac. Pour revenir à la situation de départ, soit 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts, il faudrait enlever un chapeau vert et le remplacer par un chapeau bleu. Puisque le sac contient 3chapeaux de chaque couleur, la probabilité de choisir un chapeau vert est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité de choisir un chapeau bleu, suivi d'un chapeau vert est donc égale à $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
Au final, la probabilité pour qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts est égale à $\frac{5}{18} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$.

Exercice 4. 4 Un carré dans un triangle

Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 2. On construit un carré $PQRS$ tel que les points P, Q appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[BC]$ et les points R et S appartiennent tous les deux au segment $[AC]$. On suppose qu'en faisant bouger les points P, Q, R et S de manière que P, Q et R demeurent sur les côtés du triangle, tandis que le point S se déplace du segment $[AC]$ au segment $[AB]$ en passant par l'intérieur du triangle. Si les points P, Q, R et S forment continuellement les sommets d'un carré, démontrer que le chemin tracé par le point S est un segment de droite parallèle au côté $[BC]$.

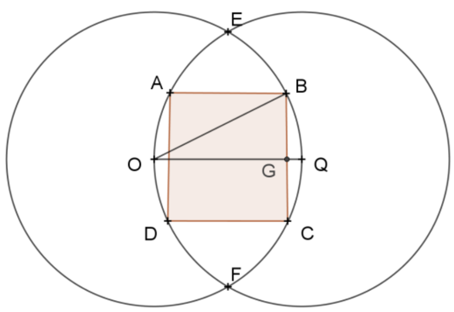
On pose $\widehat{RQC} = \theta$. Soit T le projeté orthogonal du point S sur la droite (BC). Alors $\widehat{PQB} = 180° - 90° - \theta = 90° - \theta$.
On note s la longueur du carré $PQRS$.
La perpendiculaire à (BC) passant par R coupe $[BC]$ en D et coupe la parallèle à (BC) passant par S en E.
La perpendiculaire à (BC) passant par P coupe $[BC]$ en F.
On va montrer que la distance de S à la droite (BC) c'est-à-dire la longueur ST est constante lorsque θ varie.
Par construction le quadrilatère STDE est un rectangle (angles droits) donc $ST = ED = ER + RD$.



Dans le triangle QRD rectangle en D, $RD = s\sin\theta$.
D'autre part, $\widehat{SRE} = 18° - 90° - \widehat{QRD} = 90° - (90° - \theta) = \theta$ donc dans le triangle SER rectangle en E, $ER = s\cos\theta$.
On doit donc démontrer que $s\sin\theta + s\cos\theta$ est une constante.
Le triangle ABC est équilatéral de côté 2 et S restant intérieur au triangle, on a l'égalité :
$2 = BC = BF + FQ + QD + DC$.
Or, dans le triangle RDC rectangle en D, $\widehat{DCR} = 60°$ donc $\frac{DR}{DC} = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}$
soit $DC = \frac{1}{\sqrt{3}} DR = \frac{1}{\sqrt{3}} s\sin\theta$.
Dans le triangle RDQ rectangle en D, $\frac{QD}{QR} = \cos\theta$ d'où $QD = s\cos\theta$.
Dans le triangle PFQ rectangle en F, $\frac{FQ}{PQ} = \cos\widehat{PQF} = \cos\widehat{PQB} = \cos(90° - \theta) = \sin\theta$
soit $FQ = s\sin\theta$.
Dans le triangle BFP rectangle en F, avec un raisonnement analogue à celui mené dans le triangle RDC, $FB = \frac{1}{\sqrt{3}} s\cos\theta$.
Au final, $2 = \frac{1}{\sqrt{3}} s\cos\theta + s\sin\theta + s\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}} s\sin\theta = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(s\sin\theta + s\cos\theta)$
Soit $s\sin\theta + s\cos\theta = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$, qui ne dépend pas de θ.

Exercice 4. 5 Un carré entre deux cercles

Les cercles de centres O et Q, de rayon 1, passent l'un par le centre de l'autre. Le carré ABCD a deux côtés parallèles à la ligne des centres, deux sommets sur un des cercles, deux sommets sur l'autre. Quel est le côté de ce carré ?



Appelons x le côté du carré. La distance OQ valant 1, si G est le point d'intersection de [OQ] avec [BC], on a $GQ = \frac{1-x}{2}$ pour des raisons de symétrie.

D'où l'on tire $\mathrm{OG} = \mathrm{OQ} - \mathrm{GQ} = 1 - \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2}$

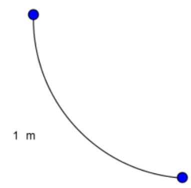
Le triangle OBG étant rectangle en G :

$$1 = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Ce qui conduit à l'équation $x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$, dont la racine positive est $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

Problème 4. 6 Extra-terrestres

La planète Valse est peuplée d'habitants, les Quarts, qui ont un mode de déplacement particulier sur un sol que l'on assimile à un plan : un Quart ne se déplace qu'en faisant une succession de quarts de cercles complets de longueur 1m, deux quarts de cercles successifs ne pouvant pas avoir le même centre (le Quart ne fait pas de demi-cercle). Lorsqu'il parcourt un quart de cercle on dira que le Quart fait un « pas ».



1. Un Quart souhaite se déplacer d'un point A à un point B.

a. Vérifier que, s'il n'a fait qu'un pas pour aller de A à B, la distance AB est d'environ 90 cm.

b. Un Quart part d'un point A. Quel est l'ensemble des points du plan qu'il peut atteindre en un seul pas ?

c. Deux points A et B étant distants de 0,5 m, un Quart veut aller de A à B en une succession de pas. Décrivez et dessinez un itinéraire en deux pas puis un itinéraire en trois pas.

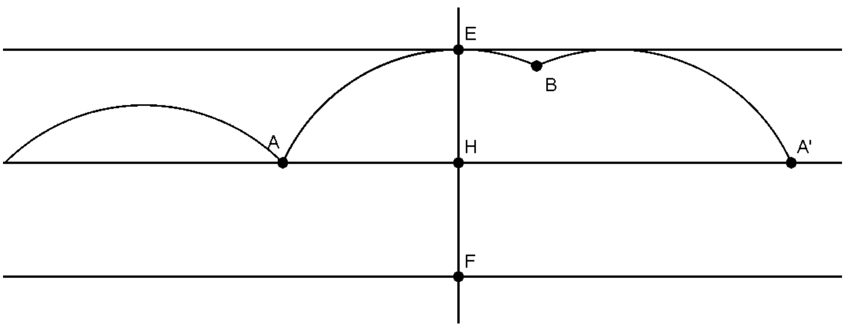
d. Un Quart part d'un point A. Quel est l'ensemble des points qu'il peut atteindre en deux pas ?

2. Un Quart veut aller d'un point A à un point B distant de 2017 m.

a. Quel est le nombre de pas minimum qu'il faudra effectuer pour aller de A à B.

b. La planète Valse est peuplée de 1 000 milliards de milliards de Quarts. Est-il possible que chaque Quart puisse emprunter un chemin différent pour aller de A à B ?

3. Un Quart se promène sur un chemin rectiligne de largeur *d*, égale à 0,90 m, sans en sortir et en faisant en sorte que les extrémités de ses pas restent sur l'axe central (D) du chemin. Mais ce chemin est coupé par un énorme arbre tombé perpendiculairement à cet axe et ne laissant qu'un petit passage sur un des bords du chemin qui l'oblige à changer sa trajectoire. Cette situation est modélisée sur la figure suivante, où l'arbre est représenté par le segment [EF] et le passage étant considéré comme étant le point E et où A est la dernière position du Quart sur l'axe (D) avant de franchir l'obstacle. Le Quart projette ainsi une trajectoire représentée par l'arc de cercle d'extrémités A et B passant par E.

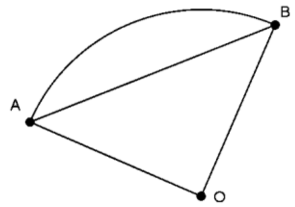


a. Démontrer que le centre O de l'arc de cercle décrit par le Quart doit se situer sur la droite (EF).

b. Déterminer à quelle distance AH du segment [EF] doit se trouver le point A si le Quart veut pouvoir franchir l'obstacle de cette façon.

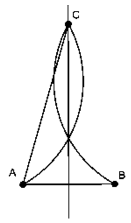
c. Le Quart réussit à franchir l'obstacle et, parti de A, revient ainsi en deux pas sur l'axe (D) du chemin en un point A'. Déterminer la distance A'H.

1. ***a.*** Si la trajectoire pour aller de A à B est d'un pas, c'est-à-dire d'un quart de cercle de centre O, alors le triangle OAB est rectangle isocèle de rayon R et d'hypoténuse $\mathrm{AB} = R\sqrt{2}$.
Pour calculer R, nous savons que le quart de cercle AB a pour longueur 1m donc $\frac{2\pi R}{4} = 1$ soit $R = \frac{2}{\pi}$.
Ainsi AB = $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. En centimètre la distance AB, arrondie au mm, est 0,90 m.

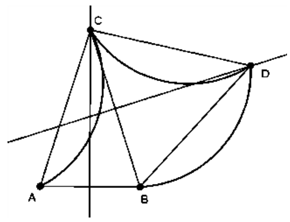


b. En un pas un Quart peut ainsi atteindre n'importe quel point B situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

c. Si un Quart part de A il se retrouve au bout d'un premier pas en un point C d'un cercle de centre A et rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
S'il revient en B en un second pas, $\mathrm{AC} = \mathrm{CB} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, C doit donc être sur la médiatrice de [AB]. Réciproquement un tel point C convient.



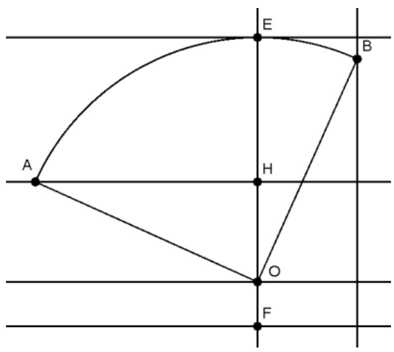
Si le Quart fait trois pas cela reviendra par exemple d'aller de C en B en deux pas, et donc atteindre à partir de C un point D situé sur la médiatrice de [BC] et sur un cercle de centre C et rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
Cela est possible si BC <$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \times 2$, ce qui est le cas.



d. Si un point B est atteint en deux pas à partir de A alors A et B sont « reliés » par une ligne brisée formée de deux segments de longueur $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, ainsi la distance maximale entre A et B doit être $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$.
Réciproquement soit B un point du disque de centre A et rayon $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$, alors AB ≤ $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$, et donc le pied H de la médiatrice de [AB] est tel que AH ≤ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Le cercle de centre A et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, coupe donc cette médiatrice en au moins un point C tel que AC = CB=$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Il existe donc deux quarts de cercle de longueur 1 reliant A à B.

2. ***a.*** Si $AB = 2\,017$, on cherche à les relier par la ligne droite ou brisée la plus courte, succession de segments de longueur $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Or $\frac{2\,017}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}} = \frac{2\,017\times\pi}{2\sqrt{2}} \cong 2\,240{,}32$. Ainsi il faut 2 240 pas pour arriver à 0,32 m de B. Il faudra au moins deux pas de plus pour arriver en B. Ainsi il faudra au minimum 2 242 pas pour aller de A à B.
b. A chaque pas il y a deux choix d'itinéraires donc il y a 2^{2242} itinéraires possibles. Or il y a 1 000 milliards de milliards de Quarts, soit $10^3\times10^9\times10^9 = 10^{21}$. Or $10 < 2^4$ donc $10^{21} < 2^{48}$. Cela est largement inférieur à 2^{2242}, ne nombre d'itinéraires différents. Ainsi chaque Quart pourra emprunter un itinéraire différent.

3. ***a.*** La bande modélisant le chemin est bordée par les droites parallèles (D_1) passant par E et (D_2) passant par F. Le quart de cercle doit passer par E sans sortir de la bande donc il doit être tangent à la droite (D_1). Ainsi le rayon du cercle issu du point de contact E est perpendiculaire à la tangente (D_1). Le centre O du cercle portant le quart de cercle d'extrémités A et B est donc sur la droite (EF).



b. Considérons le triangle AHO rectangle en H ; d'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HO}^2 = \mathrm{OA}^2$.
Donc $\mathrm{AH}^2 = R^2 - \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 = R^2 - R^2 + Rd - \frac{d^2}{4} = Rd - \frac{d^2}{4}$
Soit $\mathrm{AH}^2 = \frac{2}{\pi} \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{8}{4\times\pi^2} = \frac{4\sqrt{2}-2}{\pi^2}$ donc $\mathrm{AH}^2 \approx 0{,}37$
et donc $\mathrm{AH} \approx 0{,}61$ m.

c. Considérons le pied K de la perpendiculaire passant par B sur la droite (D) qui modélise l'axe du chemin. Les angles alternes internes $\widehat{HOB}$ et $\widehat{OLK}$ ont la même mesure.
De plus $\widehat{AOB}\ = 90°$ donc $\widehat{HOB}\ = 90 - \widehat{HOA} = \widehat{HAO}$
Les triangles rectangles AOH et BOG ont des hypoténuses de même longueur et un même angle aigu. En utilisant les sinus et cosinus de cet angle, on montre que ces deux triangles ont des côtés de même longueur.
Ainsi $\mathrm{OH} = \mathrm{OG} = \mathrm{HK}$.
Après avoir franchi l'obstacle en un pas le Quart se trouve en B. Il rejoindra l'axe (D) en un pas, arc dont la corde $\mathrm{BA'} = \mathrm{BA}$. Par symétrie $\mathrm{A'K} = \mathrm{AK}$.

Donc A' est tel que :

$$\mathrm{HA'} = \mathrm{HK} + \mathrm{KA'} = \mathrm{HK} + \mathrm{AK} = \mathrm{HK} + \mathrm{HK} + \mathrm{AH} = 2\mathrm{OH} + \mathrm{AH} = 2\mathrm{R} - \mathrm{d} + \mathrm{AH} \approx 2 \times \frac{2}{\pi} - 0{,}90 + 0{,}61$$

Donc $\mathrm{HA'} \cong 0{,}98\ \mathrm{m}$