ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

Fiche numéro 3

Attention : l'énoncé de l'exercice 3.5 comportait une coquille, qui est corrigée ci-dessous. Dans plusieurs des copies transmises, les stagiaires avaient rectifié d'eux-mêmes et rédigé la solution.

Exercice 3. 1 Pour réviser sa table des nombres premiers
Pour chaque nombre réel positif x, on définit $f(x)$ comme étant le nombre de nombres premiers p qui vérifient $x \leq p \leq x+10$. Quelle est la valeur *de* $f(f(2021))$?

On commence par déterminer $f(2021)$ c'est-à-dire le nombre de nombres premiers p compris entre 2021 et 2031.
Pour cela on remarque que parmi les entiers compris entre 2021 et 2031, on exclut :

- 2022, 2024, 2026, 2028 et 2030 qui sont pairs ;
- 2025 qui est multiple de 5 ;
- 2031 qui est multiple de 3 (somme des chiffres multiple de 3)

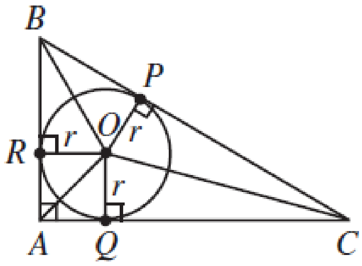
On doit donc étudier la divisibilité de 2021, 2023, 2027, 2029 par les premiers nombres premiers (ceux inférieurs à la racine carrée du nombre 2029 soit à 45) soit 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.
On constate que $2021 = 43 \times 47$ donc 2021 n'est pas premier.
On constate que $2023 = 7 \times 289$ donc 2023 n'est pas premier.
On constate que 2027 et 2029 sont premiers donc $f(2021) = 2$.
Alors $f\big(f(2021)\big) = f(2)$. C'est le nombre de nombres premiers compris entre 2 et 12 soit 5 (les nombres premiers étant 2, 3, 5, 7 et 11).

Exercice 3. 2 Tournoi entre amis
Quatre joueurs de tennis, Alain, Bianca, Chen et Dave, participent à un tournoi dans lequel on joue un total de trois matchs, indépendants les uns des autres. Tout d'abord, on choisit au hasard deux joueurs afin qu'ils s'affrontent lors d'un premier match. Les deux autres joueurs s'affrontent également lors d'un deuxième match. Les vainqueurs des deux premiers matchs s'affronteront lors d'un troisième match pour le titre de champion du tournoi.
Alain, Bianca et Chen sont tous les trois des joueurs de même niveau (c'est-à-dire chacun d'eux a une même probabilité de victoire contre chacun des deux autres joueurs lors d'un match, soit une probabilité de $\frac{1}{2}$). Lorsque Dave affronte chacun des trois autres joueurs, sa probabilité de victoire est égale à p.
Déterminer, en fonction de p, la probabilité que Bianca gagne le titre de champion du tournoi.

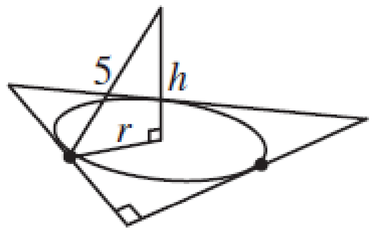
Comme Alain, Bianca et Chen sont des joueurs de même niveau, ils ont la même probabilité, qu'on notera x, de remporter le titre de champion.
On note y la probabilité que Dave remporte le titre. Puisque uniquement l'un des quatre joueurs reporte le titre, on peut écrire : $3x + y = 1$ soit $x = \frac{1-y}{3}$.
Dave doit gagner deux matchs afin de remporter le titre de champion du tournoi.
Peu importe le joueur que Dave affronte lors d'un match, sa probabilité de victoire est égale à p.
Donc, la probabilité qu'il gagne ses deux matchs consécutifs est égale à p^2 puisque les matchs sont indépendants les uns des autres. . Donc, la probabilité qu'il remporte le titre de champion du tournoi vaut $y = p^2$.
Donc, la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi est égale à $\frac{1-p^2}{3}$.

Exercice 3. 3 En suspension
Trois tiges de métal minces, de longueurs 9, 12 et 15, sont soudées pour former un triangle rectangle que l'on place dans un plan horizontal. Une sphère de rayon 5 est placée de manière à reposer dans le triangle. Elle est alors tangente à chacun des côtés.
Si on néglige l'épaisseur des tiges, quelle est la hauteur du haut de la sphère par rapport au plan du triangle?

On considère la section de la sphère par le plan qui contient le triangle. Cette section est un cercle. Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle. Il est donc le cercle inscrit dans le triangle. Soit O le centre du cercle et r son rayon. On cherche à déterminer la valeur de r.



On joint le point O aux trois points de contact, P, Q et R, ainsi qu'aux trois sommets A, B et C.
Les rayons $[OP]$, $[OQ]$ et $[OR]$ sont donc perpendiculaires aux côtés du triangle.
On considère les triangles AOB, BOC et COA. Ces triangles ont des bases respectives de 15, 9 et 12 et une hauteur r. Puisque l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AOB,BOC et COA, alors :
$\frac{9\times 12}{2} = \frac{r}{2}(9 + 12 + 15)$ ce qui donne $r = 3$.



On joint le centre du cercle à celui de la sphère.
Soit h la distance entre les deux centres. Le segment qui joint les centres est perpendiculaire au plan déterminé par le triangle. On a donc un triangle rectangle formé par les deux centres et n'importe quel point sur le cercle.
D'après le théorème de Pythagore :
$h^2 = 5^2 - r^2 = 25 - 9 - 16$ d'où $h = 4$.
Pour avoir la hauteur du haut de la boule, il suffit d'ajouter son rayon à h, ce qui donne 9 comme hauteur du haut de la sphère par rapport au plan du triangle.

Exercice 3. 4 Solutions pour une solution

Quel est le plus petit entier positif k pour lequel l'équation $\sqrt{x - 127} + \sqrt{k - x} = 13$ a au moins une solution ? Quelles sont les solutions correspondant à cette valeur de k?

On commence par relever que l'équation précédente n'a de toute façon pas de solutions inférieures à 127. Les calculs qui suivent n'ont de sens que pour $x \leq k$. Chacun des termes du premier membre doit être inférieur au second, ce qui donne $\sqrt{x - 127} \leq 13$ ou encore $x \leq 296$. S'il y a des solutions, elles sont comprises entre 127 et 296. De même, $k - x \leq 169$. Ces observations rendent les calculs suivants légitimes.
On transforme :
$$\sqrt{x - 127} = 13 - \sqrt{k - x}$$
Puis $x - 127 = k - x + 169 - 26\sqrt{k - x}$.
Cette dernière égalité peut être écrite comme une équation dont l'inconnue est $\sqrt{k - x}$:
$$2\left(\sqrt{k - x}\right)^2 - 26\sqrt{k - x} + 296 - k = 0$$

Cette équation a des solutions si et seulement si son discriminant est positif. La condition sur k s'écrit donc :
$$169 - 2 \times 296 + 2k \geq 0$$
Ou encore $2k \geq 423$ et finalement $k \geq 212$.
Nous avons procédé par conditions nécessaires et suffisantes.
Pour $k = 212$, on obtient en résolvant la dernière équation $\sqrt{212 - x} = 7$ ou $\sqrt{212 - x} = 6$, qui donnent 163 et 176 comme solutions de l'équation initiale.

Exercice 2. 5 Suite d'entiers

On considère une suite de nombres entiers x_0, x_1, x_2, x_3 , … , x_n, … telle que x_0 est positif ou nul et pour tout entier n, $x_{n+1} = (x_n)^2 + 1$.
1. Démontrer que pour tout entier x_0 choisi au départ, $x_2 - x_0$ est un entier pair.
2. Démontrer que pour tout entier non nul i, $x_{i+6} - x_i$ est un multiple de 10 (*énoncé corrigé)*.

1. Pour toute valeur de x_0, $x_1 = (x_0)^2 + 1$ et $x_2 = (x_1)^2 + 1 = ((x_0)^2 + 1)^2 + 1 = (x_0)^4 + 2(x_0)^2 + 2$ donc

$x_2 - x_0 = (x_0)^2((x_0)^2 + 1) + x_0(x_0 - 1) + 2.$
On montre aisément que le produit de deux entiers consécutifs est pair. Comme 2 est pair, $x_2 - x_0$ est pair.
On peut aussi raisonner en distinguant le cas pair du cas impair pour le nombre x_0.
2. Un entier est divisible par 10 si et seulement si son chiffre des unités est 0. On va donc montrer que quelle que soit la valeur choisie au départ pour x_0, le chiffre des unités de $x_6 - x_0$ est 0.
Quelle que soit la valeur de x_n, il existe un entier k positif ou nul et un entier p compris entre 0 et 9 tel que $x_n = 10k + p$. On a alors
$(x_n)^2 + 1 = (10k + p)^2 + 1 = 100k^2 + 10 \times 2kp + p^2 + 1$. On en déduit que $(x_n)^2 + 1$ a le même chiffre des unités que $p^2 + 1$. On peut alors établir ligne après ligne le tableau ci-dessous donnant le chiffre des unités des 7 premiers nombres de la suite des x_n :

x_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{x_1}$	**1**	**2**	**5**	**0**	**7**	**6**	**7**	**0**	**5**	**2**
x_2	2	5	6	1	0	7	0	1	6	5
x_3	5	6	7	2	1	0	1	2	7	6
x_4	6	7	0	5	2	1	2	5	0	7
x_5	7	0	1	6	5	2	5	6	1	0
x_6	0	1	2	7	6	5	6	7	2	1
$\boldsymbol{x_7}$	**1**	**2**	**5**	**0**	**7**	**6**	**7**	**0**	**5**	**2**

On constate que le chiffre des unités est le même pour x_1 et pour x_7 ce qui signifie que $x_{i+6} - x_i$ est divisible par 10 quelle que soit la valeur de i supérieure ou égale à 1.

Problème 3. 6 Passage de canards

La chasse est une activité controversée, mais dans cet exercice le chasseur rate à tout coup.

On considère l'application f qui à tout couple d'entiers naturels (x, y) associe l'entier défini par

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2.$$

1. *a.* Démontrer que pour tout couple (x, y) d'entiers

$$(P_1) \qquad f(3x + 4y, 2x + 3y) = f(x, y).$$

b. Démontrer que si x, y, u, v sont des entiers, alors

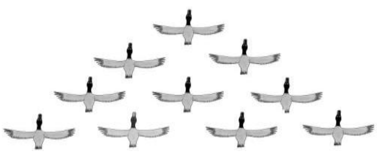
$$(P_2) \qquad f(x, y)f(u, v) = f(xu + 2yv, xv + yu)$$

2. *a.* Vérifier que le couple $(45,2)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2017$.
En déduire deux autres couples solutions de cette équation.
b. Déterminer un couple solution de chacune des équations suivantes

$$f(x, y) = 4034 \qquad\qquad f(x, y) = -2017$$

3. On se propose de déterminer des couples solutions de l'équation (E) : $f(x, y) = 3$.
a. Montrer que si (a, b) est solution de cette équation, alors a est impair.
b. On pose $a = 2a' + 1$. Montrer que b est impair.
c. En posant $b = 2b' + 1$, démontrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

4. On admet que les canards migrateurs, lorsqu'ils se déplacent, constituent des vols ayant la forme suivante dite en triangle.



Si un vol de n rangées est complet, le nombre de canards de ce vol est égal à

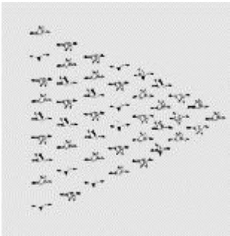
$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tartarin raconte qu'un jour où il était à la chasse il a vu arriver un vol complet de canards, **entre cent et mille** à coup sûr ! Son coup de fusil ne tua aucun oiseau mais, surpris, les volatiles se scindèrent en deux groupes formant deux triangles complets de même effectif.

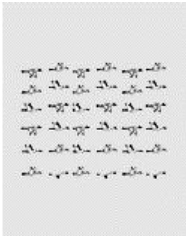
a. Montrer que si a et b désignent respectivement le nombre de rangées du grand et des petits triangles alors $f(2a+1, 2b+1) = -1$.

b. Quel peut être le nombre de canards aperçus par Tartarin ?

5. Tartarin raconte encore que le lendemain un autre vol de canards, encore plus important que la veille, **entre mille et deux mille**, est passé au-dessus de sa tête. Son coup de fusil n'a encore touché aucun oiseau mais le vol s'est soudain mis en forme de carré avant de se séparer quelques instants plus tard en deux vols triangulaires d'effectifs différents.



Avant le coup de fusil



Après le coup de fusil

Après la séparation

Quel est l'effectif total des canards et celui de chacun de ces deux vols ?

1. ***a.*** $f(3x+4y, 2x+3y) = (3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2(4x^2 + 12xy + 9y^2)$
Donc $f(3x+4y, 2x+3y) = x^2 - 2y^2 = f(x, y)$.
b. De même, $f(x,y)f(u,v) = f(xu + 2yv, xv + yu)$.

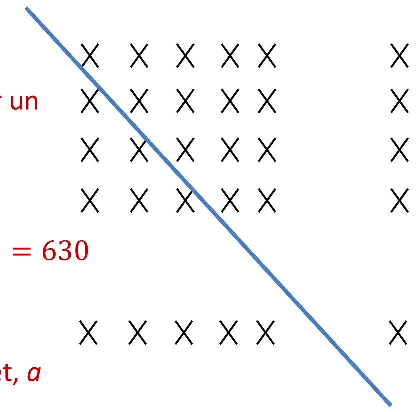
2. ***a.*** $f(45{,}2) = 2025 - 2 \times 4 = 2017$.
Pour $x = 45$ et $y = 2$, $(3x+4y, 2x+3y) = (143, 96)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2017$.
Pour $x = 143$ et $y = 96$, $(3x+4y, 2x+3y) = (813, 574)$ est une autre solution.
b. En utilisant **1*b*.** et $f(2{,}1) = 2$, avec $u = 2$, $v = 1$, $x = 45$ et $y = 2$, $(xu + 2yv, xv + yu) = (94, 49)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2 \times 2017$.
De même, $f(1{,}1) = -1$ donc $(49, 47)$ est solution de l'équation $f(x, y) = -2017$.

3. ***a.*** Si $a^2 - 2b^2 = 3$, comme $2b^2$ est pair, alors a^2 est impair donc a est impair.
b. $(2a'+1)^2 - 2b^2 = 3$ donc $b^2 = 2a'(a'+1) - 1$ est impair, donc b est impair.
c. $(2b'+1)^2 = 2a'(a'+1) - 1$ donc $2b'(b'+1)^2 - a'(a'+1) = -1$.
Or $2b'(b'+1)^2$est pair et $a'(a'+1)$ est pair (produit de deux entiers dont l'un est pair), donc le premier membre est pair alors que le second est impair. Il est donc impossible qu'il y ait une solution à l'équation (E).

4. ***a.*** On a $T_a = 2T_b$ qui équivaut à $a(a+1) = 2b(b+1)$.
Or $f(2a+1{,}2b+1) = -1$ équivaut à $(2a+1)^2 - 2(2b+1)^2 = -1$ soit $4a^2 + 4a = 2(4b^2 + 4b)$
soit $a(a+1) = b(b+1)$
On a donc $f(2a+1{,}2b+1) = -1$.
b. Comme il y a entre 100 et 1000 canards, on a $200 \leq a(a+1) \leq 2000$
donc $14 \leq a \leq 44$ d'où $29 \leq 2a+1 \leq 89$. De même, a $100 \leq b(b+1) \leq 1000$, donc $21 \leq 2b+1 \leq 63$.
$f(1{,}1) = -1$, donc , d'après la question 1., $f(7{,}5) = -1$, $f(41{,}29) = -1$.
Le couple (41, 29) convient pour $a = 20$ et $b = 14$. Il est possible que le nombre de canards dans le vol soit 210.

5. ***a.*** En désignant respectivement par n l'effectif du premier vol et par a et b (avec $a < b$) les effectifs des deux vols après la séparation, on a $T_n = p^2 = T_a + T_b$.

$T_n = p^2$ équivaut successivement à : $n^2 + n = 2p^2$; $4\,n^2 + 4n = 8p^2$; $(2n+1)^2 - 2(2p)^2 = 1$; soit $f(2n + 1{,}2p) = 1$.
Le vol contient entre 1000 et 2000 canards donc $32 \leq p \leq 44$ et $45 \leq n \leq 62$ d'où $64 \leq 2p \leq 88$
et $91 \leq 2n+1 \leq 125$. On cherche donc un couple (x, y) tel que $91 \leq x \leq 125$, $64 \leq y \leq 88$ et $f(x, y) = 1$.
On a $f(1{,}0) = 1$, donc $f(3{,}2) = 1$, $f(17{,}12) = 1$, $f(99{,}70) = 1$.
On peut donc prendre $99 = x = 2n + 1$ et $70 = y = 2p$, soit $n = 49$ et $p = 35$.
Il est donc possible que le vol comporte 1225 (=35^2) canards.



On peut remarquer géométriquement que l'on peut assez facilement partager un carré en deux triangles à l'aide d'une droite.

On peut donc prendre $b = a + 1 = p$.
L'un des vols est alors constitué de $T_{34} = 595$ canards et l'autre comporte $T_{35} = 630$ canards.

Remarques : Pour les questions 4 et 5, nous donnons des solutions possibles et, *a priori*, rien ne permet d'affirmer qu'il n'y en a pas d'autres.
Pour la question 4, on peut vérifier que la solution donnée est la seule.
Pour la question 5, il y a exactement une autre solution possible avec 190 canards pour l'un des vols et 1035 pour l'autre.