Des éléments de solution

GEOMETRIE

Exercice 1

Théorème de Pythagore, équation du second degré.

Exercice 2

La symétrie d'axe (AF) envoie E sur le point E' de la demi-droite [CD) tel que DE' = EB.

Exercice 3

Une méthode consiste à utiliser le symétrique P de B par rapport à C et montrer que P, D et E sont alignés.

Exercice 4

Les droites qui coupent les côté [BC] du triangle ABC sont celles qui coupent le côté [AC] ou le côté [AC] mais pas les deux. On fait donc apparaître deux disques dont l'ensemble cherché est la différence symétrique.

Exercice 5

Avec les notations habituelles et en notant α le quart d'angle cherché, on parvient à c x $\cos(\alpha)$ = b x $\cos(3\alpha)$ et c x $\sin(3\alpha)$ = b x $\sin(\alpha)$…

Exercice 6

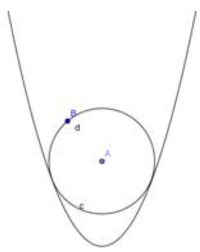
C'est le triangle d'or.

FONCTIONS

Exercice 1

Les réels u et v ont même image par une fonction (dépendant d'un paramètre b). L'étude des variations de cette fonction montre que ce n'est possible que pour des éléments de l'intervalle $[-b, -b+1]$, et comme ce sont des entiers qui nous intéressent…

Exercice 2



On se ramène à l'étude de la fonction qui à x associe $x^4 + (1- 2c)\, x^2 + c^2$, où c désigne l'ordonné du centre de la bille (il faut faire un dessin).

Exercice 3

Les points M1 et M2 peuvent s'interpréter comme des barycentres des sommets des segments qu'ils parcourent, un des coefficients étant le temps.

Exercice 4

Pour la fin : les rationnels compris entre 0 et 1 dont une écriture a pour dénominateur q sont au nombre de q. Leurs images aussi sont q et sont à prendre parmi eux…

Exercice 5

$f \circ f \circ f = Identité$ (de quoi, on ne précisera pas trop)

Exercice 6

On remonte (par f) chaque quotient à un antécédent inférieur à 1, lequel est remonté par g, jusqu'à ce qu'on obtienne un rationnel de numérateur 1, qui est remonté par g jusqu'à 1.

INEGALITES

Exercice 1

Exercice 2

Le carré de ce produit est un produit de trois identités remarquables, comme disent les élèves.

Exercice 3

Pour le a, si toutes les différences sont positives poser $x+y=a, y+z=b, z+x=c$

Pour le b, les suites a,b,c et a^2,b^2,c^2 sont rangées dans le même ordre. On multiplie les inégalités par ce qu'il faut et on ajoute.

Pour le c, c'est la même idée

Pour le d, réduire au même dénominateur et faire apparaître en facteur les différences.

Exercice 4

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ envoie $\mathbf{R}^+$ dans $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, donc, de cinq nombres positifs, deux au moins ont des images différant de moins de 1/8.

Exercice 5

C'est encore la transformation du 3 a

Exercice 6

De $x\left(y^2-z^2\right)+yz\left(y-z\right)\geqslant 0$ on déduit $x^2\dfrac{y}{z}+y^2\dfrac{z}{x}+z^2\dfrac{x}{y}\geqslant x^2\dfrac{z}{y}+y^2\dfrac{x}{z}+z^2\dfrac{y}{x}$. La somme des 2 membres de cette inégalité est supérieure à $2\left(x^2+y^2+z^2\right)$, et donc le plus grand des deux est supérieur à $x^2+y^2+z^2$.

PROBABILITES, NOMBRES, COMBINATOIRE

Exercice 1

La première question demande un exemple, et attire l'attention sur la moyenne.
La seconde utilise la notion de moyenne : dans une distribution statistique, il ne se peut pas que toutes les occurrences soient inférieures à la moyenne.
On découvre, chemin faisant, qu'il est impossible que deux voisins réalisent le même gain, attendu que $a+b+c=b+c+d$ entraîne $a=d$, ce qui ne se peut pas.
Si on veut que tous les gains soient inférieurs ou égaux à 17, comme $4\times17+6\times16 = 164$ et que le total des dix gains est 165, cinq au moins des gains sont égaux à 17. Deux voisins ne sauraient avoir des gains égaux, donc cinq gains exactement sont égaux à 17 et les cinq autres à 16 ($165 - 5\times17 = 5\times16$). Reste à voir comment on peut interpréter les égalités $a+b+c=17$, $b+c+d=16$, $c+d+e=17$, $d+e+f=16$.

Exercice 2

On doit donc résoudre $x^2 = 100q^2 + r$, ou r est un entier inférieur ou égal à 99 et q un entier non nul. On pose $x-10q = r_1$, $x+10q = r_2$. La différence $r_2 - r_1$ est un multiple de 20 et la somme $r_2 + r_1$ est égale à $2x$. Catalogue pour finir.

Exercice 3

Seules les portes ayant un nombre pair de diviseurs sont ouvertes. Leur numéro est le carré un entier.

Exercice 4

Les premières questions se résolvent pas des considérations d'encombrement : une pièce formée de 10 carrés " unité " accolés comme il est dit " tient " dans un rectangle de demi-périmètre 10. On peut faire tenir quatre tels rectangles dans le carré. On pourrait faire mieux, apparemment, en imbriquant les pièces. Est-ce possible pour toutes les pièces ? Essayer avec la " croix " stable par symétrie centrale.

Exercice 5

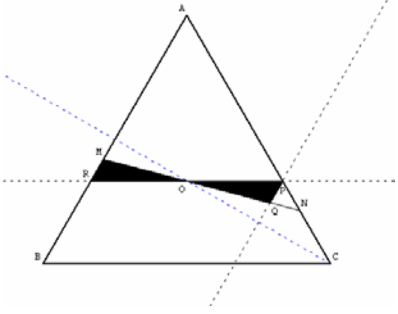
Il y a autant de nombres se terminant par 1 à l'étape n que de nombres à l'étape n-1 et autant de nombres se terminant par 2 que de nombres à l'étape n-2.

Exercice 6

Il s'agit de trouver des approximations de $\sqrt{1-\alpha}$.

AIRES ET ESPACE

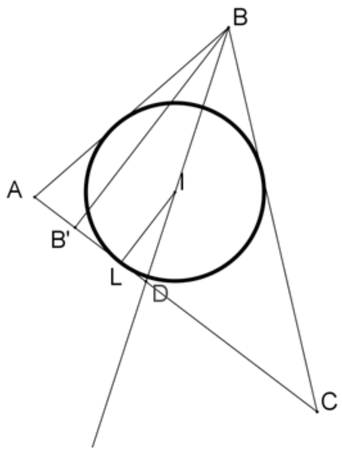
Exercice 1



Il faut sans doute exclure le cas M = C…

Cela fait, la figure ci-contre met en évidence un minimum (les deux triangles noirs s'équilibrent, un petit triangle blanc fait pencher la balance)

Exercice 2



Pour la seconde question, on note x la longueur AB, le périmètre p est donc $3x + 3$ et l'aire S du triangle s'écrit :

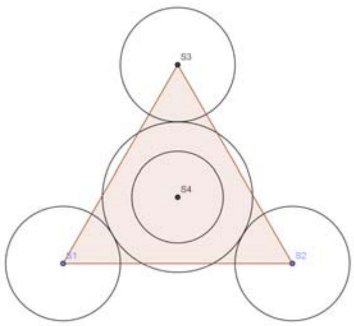
$S=\frac{3}{2}r(x+1)$. Elle s'écrit aussi, $S=\frac{1}{2}(x+1)\mathrm{BB'}$. Par application du théorème de Thalès, $\frac{\mathrm{BB'}}{r}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{ID}}$, d'où le résultat.

On écrit la condition exprimant grâce aux longueurs des côtés que le triangle est rectangle. On parvient au triangle de côtés 3, 4, 5.

Le plus grand des trois angles, l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$, est aigu si et seulement si $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2>\mathrm{AC}^2$ qui renvoie à la condition donnée par l'énoncé.

Des trois angles d'un triangle, l'un a nécessairement une mesure inférieure à 60°, un autre une mesure inférieur à 60°. L'angle de mesure intermédiaire est ici $\widehat{\mathrm{ABC}}$. On calcule son cosinus et on prouve qu'il est supérieur à ½.

Exercice 3



Le problème se ramène à savoir si un sommet d'un des petits cônes est visible d'un autre. La figure vue de dessus conduit à formuler la question : le cercle **Ω** situé à la hauteur r du grand cône est-il intérieur au triangle équilatéral ?

Le cercle de base du grand cône a pour rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}-r$. Le cercle **Ω** a pour rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3}{2}r$. C'est ce rayon qu'il faut comparer au tiers de la hauteur du triangle.

Exercice 4

La première question revient à cherche le rayon du cercle tritangent à trois cercles de même rayon tangents deux à deux et dont les centres sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 6. On trouve le rayon maximal : $2\sqrt{3}-3$.

La seconde revient à déterminer le rayon d'un cercle tangent à la fois à un cercle de rayon 3 et à une droite tangente à ce crcle. On trouve $r=1$.

La troisième revient à déterminer le rayon d'une sphère dont le centre est le centre d'un tétraèdre régulier d'arête 6, tangente à des sphères de rayon 6 centrées en les sommets du tétraèdre. Il faut d'abord situer ce centre (au quart de la hauteur), déterminer la hauteur puis écrire qu'elle esu la somme de son quart et de la somme des grand et petit rayons. On trouve $r=\frac{3\sqrt{6}}{2}-3$.

Exercice 5

Préliminaire : Le point M est le barycentre du système $\{(B,4),(A,2),(C,2),(D,1)\}$. On peut identifier les autres sommets de MNOP comme des barycentres et obtenir un premier résultat : les divisions des segments [FI], [GL], [HK], [JE] sont régulières.

L'aire du triangle BFG est le neuvième de celle du triangle BAC (agrandissement).

L'aire du triangle BFC est le tiers de celle du triangle BAC (un côté triplé).

L'aire du triangle FIC est égale à l'aire du triangle FIJ (médiane).

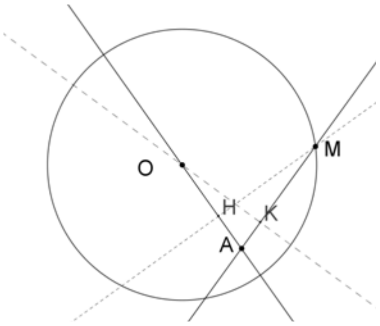
L'aire du quadrilatère AFCJ est égale aux deux tiers de l'aire du quadrilatère ABCD (on enlève un tiers de l'aire de BAC d'un côté, un tiers de l'aire de CDA de l'autre).

L'aire du quadrilatère EFIJ est égale au tiers de l'aire de ABCD (on prend la moitié de FCJ d'un côté, la moitié de FJA de l'autre).

Le quadrilatère MNOP est au quadrilatère EFIJ ce que EFIG est à ABCD : une « bande médiane » réalisée à partir d'un découpage en trois de côtés opposés.

D'où le résultat.

Exercice 6



L'aire de OMA est le demi-produit de MA par MH. Elle est maximale quand MH l'est, donc quand MOA est droit.

L'angle $\widehat{OMA}$ est maximal (il est aigu) quand son sinus l'est, donc quand l'angle $\widehat{OAM}$ est droit.

DIVERS

Exercice 1

On a : $(a^2-4)^2 = 5-a$, de même pour *b*, et $(c^2-4)^2 = 5+c$, de même pour *d*. Donc *a*, *b*, -*c* et –*d* sont les solutions de $(x^2-4)^2 = 5-x$. D'où leur produit, coefficient constant du polynôme $P : x \mapsto (x^2-4)^2 - 5 - x$

Exercice 2

La première question renvoie à l'irrationalité de $\sqrt[3]{2}$. L'égalité $a^3+2b^3+4c^3=0$, en nombres entiers, montre que *a* est pair. En posant $a = 2a'$, on commence la descente…

Ce qui a été fait avec 2 peut être fait avec tout nombre premier.

En prenant pour *p* le cube d'un entier et $c = 0$, on peut annuler $a^3 + pb^3$.

Exercice 3

On peut écrire des équations concernant les plus petites et les plus grandes des sommes. Par ailleurs, la somme des dix sommes est égale à 4 fois la somme des nombres cherchés. Ces deux considérations fournissent le nombre médian, 1 006, puis le plus petit, 1 000 et ainsi de suite.

Exercice 4

a. La condition s'écrit $q^2+1001 \leqslant (q+1)^2$ qui donne $q \geqslant 500$

b. Même raisonnement avec la différence de deux cubes ? On résout une équation du second degré.

c. On examine les listes de 1 000 entiers successifs ne contenant aucun carré et on s'arrête (vite) à la première ne contenant aucun cube

Exercice 5

Idée : essayer avec un carré $n^4+a^2=(n^2+a)^2-2n^2a$, qui pourrait s'écrire facilement comme produit de facteurs si a était un carré. On essaie donc $n^4+a^4=(n^2+a^2)^2-2n^2a^2$, mais cette fois un 2 fâcheux s'introduit. On essaie donc $n^4+4a^4=(n^2+2a^2)^2-4n^2a^2$, qui se factorise en produit d'entiers.

Exercice 6

Les nombres cherchés sont des entiers naturels non nuls. La relation conduit à $2xz+yz=xyz+3xy$ qui montre qu'une condition nécessaire est $2xz+yz>xyz$, soit encore $2x>y(x-1)$.

On étudie les cas $x=1$ puis $x=2$ et $x=3$. Pour $x>3$, les seuls cas à considérer pour >3, les seuls cas à considérer pour y sont 1 et 2.