Comment enseigner le calcul littéral au collège ?

Premières réflexions

Nous avons constaté qu'en fin de 3e, nos élèves avaient un niveau en calcul littéral parfois insuffisant par rapport à ce qui était attendu à l'entrée en seconde, voire au DNB (cf DNB 2019). Les difficultés sont concentrées autour des développements/ factorisations et du calcul littéral en général.

Que devons-nous faire alors pour que nos élèves aient une maîtrise suffisante pour aborder le lycée sereinement ? Faut-il insister davantage en 3e en faisant des séries d'exercices ? Les programmes sont lourds ; si nous passons plus d'heures sur le calcul littéral, ce serait au détriment d'autres notions.

Par ailleurs il est difficile d'appliquer le "manipuler-verbaliser-abstraire" préconisé dans le rapport Villani-Torossian à la notion de calcul littéral rapidement très abstraite.

Nous nous sommes réunies à plusieurs reprises pour réfléchir et échanger autour de ce sujet.

Dans ce document, nous exposons notre répartition de l'enseignement du calcul littéral sur les cycle 3 (6ème) et cycle 4. Puis nous identifions les difficultés auxquelles les élèves sont ou pourraient être confrontés. Enfin, nous présentons certaines pistes que nous suivons afin de faire progresser les élèves dans ce domaine.

I Répartition du calcul littéral sur les cycles 3 et 4

Nous avons fait le choix de répartir le calcul littéral comme suit :

6e : Utilisation de formules de périmètres, d'aires et de volumes. Utilisation de la simple distributivité sur des exemples numériques dans les deux sens. Introduction aux programmes de calculs. Utilisation des lettres dans certaines définitions et propriétés.

5e : Notion d'expression littérale (traduire un programme de calcul par exemple), substitution, convention d'écriture, réduction, simple distributivité sur des exemples numériques dans les deux sens, tester une égalité.

4e : notion d'expression développée et factorisée, simple distributivité. Résolution d'équations.

3e : utiliser le calcul littéral pour les démonstrations du cours de manière plus systématique, double distributivité, étude des trois identités remarquables dans le sens du développement et factorisation de $a^2 - b^2$.

II Identification des difficultés

1) Un nombre ou une lettre ?

La toute première difficulté est l'appréhension de la lettre en tant que nombre.

Un élève peut être déconcerté, voire même rétif, à l'idée qu'une lettre peut représenter un nombre. On entend souvent : "Mais a, c'est une lettre, ce n'est pas un nombre !". Cette objection, née de l'opposition entre "les chiffres et les lettres" est assez couramment exprimée.

2) Une variable ou une constante ?

Une deuxième difficulté vient du fait que la lettre peut représenter une constante ou une variable, ou même une expression littérale ou numérique (E=…)

Par exemple en 6eme, nous voyons la formule pour calculer la circonférence d'un cercle $\mathcal{P} = 2 \times \pi \times r$ qui mêle la lettre π qui est une constante, et la lettre r qui est une variable. Nous écrivons : $\mathcal{P}$ = $2 \times \pi \times r$, égalité faisant intervenir 3 lettres : deux variables, $\mathcal{P}$ et r, et une constante π.

Le fait qu'un nombre puisse être écrit à l'aide d'une lettre est déjà une idée compliquée. Le fait qu'une lettre ne représente pas toujours un nombre variable en est une autre.

3) Comment l'écrire ?

Il y a des difficultés liées au graphisme ou à la typographie (confusion majuscule /minuscule, script /cursif, écriture pas assez soignée ou pas assez maîtrisée).
En effet en mathématiques, il est important de distinguer minuscule, majuscule, en script ou en écriture cursive.

Exemple 1: On écrira pour un périmètre $\mathcal{P}$ = ... en majuscule cursive.

Exemple 2 : la variable x sera écrite en caractères cursif pour une meilleure lecture de $x \times x$ ou de $x \times y$.

Exemple 3 : Il faudra refuser d'appeler une variable "f", lorsque l'on est en 3eme, certaines lettres ayant un usage réservé.

La situation est encore plus complexe quand la lettre est doublée d'un indice ou d'une parenthèse suivie d'une autre lettre : E_1= … ou $B(x) = ...$

On accordera une attention particulière à la notation de $sin(x)$; la fonction sinus n'est pas notée f ou g mais sin (3 lettres !). Il est nécessaire de rappeler qu'il s'agit d'une fonction et de bien écrire les parenthèses : $sin(x)$ et non $sin\, x$.

4) Que représente la lettre ?

Il est important de désigner ce que la lettre représente : « on appelle n .... » ,« on notera n... », « n représente ...» , ...

La lettre servira aussi à clarifier et à expliciter ce que l'on calcule :
« on appellera S la somme dépensée par Loic, $S = n \times b + 4 \times p$, où n représente le nombre de baguettes, p représente le prix d'un pain et b le prix d'une baguette »

Il convient de bien insister sur la distinction entre "b: le prix d'une baguette " et "n: le nombre de baguettes", et de s'assurer que l'élève comprend ce que traduisent chacune des lettres. Parfois le fait de lui laisser la liberté de la nommer lui-même peut ôter de la confusion.

5) Que signifie le signe " = "

La signification du signe “=” en fonction des cas est, elle aussi, difficile à aborder.

➢ Le signe “ = ” sert primitivement à exprimer un résultat, à identifier ou à comparer : $1 + 1 = 2$.

➢ Le signe "=" peut indiquer que nous avons « toujours » égalité entre les deux quantités, pour toute valeur de la variable (ou des variables) : l'égalité est alors appelée identité.

➢ Le signe "=" est utilisé entre les deux membres d'une équation que l'on cherche à résoudre.

➢ Le signe "=" est utilisé dans le cadre des équations de droites : $y = 2x + 3$

➢ Le signe “ = ” peut être utilisé pour définir une fonction par exemple.
“Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x^2 - 5$”.

➢ Le signe égal peut être utilisé dans le cas d'une définition ou notation nouvelle.

Exemples : $x^2 = x \times x$ ou $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

➢ Le signe "=" peut-être utilisé dans le cadre d'une affectation :

Exemple : "Pour $x = 2$, calculer …"

Finalement, en mathématiques, ce même signe = est utilisé dans différents contextes et cela peut présenter des difficultés pour les élèves.

Il n'est pas évident que le sens de lecture d'une égalité peut, lui aussi, être important.
Exemple : $k(a+b) = ka + kb$ dans le sens du développement ou $ka + kb = k(a+b)$ dans le sens de la factorisation.

Voici une liste des abus et/ou fautes classiques autour des égalités que nous voyons dans les copies :

Exemple 1 : Joe achète 2 pains à 3,10 € et une tarte à 7 €, combien dépense-t-il ?
Il n’est pas rare de voir : $E = 2 \times 3{,}1 = 6{,}2 + 7 = 13{,}2$.

Exemple 2 : Joe achète avec un billet de 20 €, 2 pains à 3,10 € et une tarte à 7 € combien lui rend-on ?
Certains élèves écrivent : $E = 2 \times 3{,}1 = 6{,}2 + 7 = 13{,}2 - 20 = 6{,}8$.

Exemple 3 : pour la division euclidienne, beaucoup de 6eme écrivent :
21 : 5 = 4 r 1   ou   21:5 = q 4 r 1

Exemple 4 : Dans le cadre d'études de programmes de calcul, en 5eme :
Applique au nombre 1, le programme de calcul suivant : “ajouter 2 puis multiplier par 3 le résultat”.
On peut lire :
$A = 1$
$A = 1 + 2$
$A = 3(1 + 2)$
$A = 9$

Les difficultés de graphie de certains de nos élèves rendent difficile la lecture même du signe égal, noyé dans des calculs illisibles : il faut insister sur un signe égal bien écrit, verbe fondamental de la phrase mathématique, et le retour à la ligne doit être privilégié pour des suites d'égalités, signe égal sous signe égal.

6) Ambiguïté du signe "–"

En 5eme, la signification du signe " – "présente une certaine complexité avec l'apparition des nombres négatifs et l'étude de la soustraction des nombres relatifs.
Le signe – peut représenter :
- Le signe prédicatoire d'un nombre.(Exemple : (-3))
- Le signe opératoire de la soustraction.
- L'opposé d'un nombre : l'opposé de x se note $-x$.

Ainsi dans l’expression $= -(-4) + (-1) - 7$, les signes " – "ne revêtent pas le même sens : opposé / prédicatoire / prédicatoire / opératoire.

Le lien entre les trois significations est subtil et n’est pas évident ; tout comme le fait qu’une addition peut être écrite sous forme de soustraction et inversement. La propriété “soustraire un nombre, c'est additionner son opposé” est difficile à comprendre et à appliquer. Les élèves finissent par en perdre le sens et par retenir des astuces du type “moins moins, cela fait plus” pour contourner la difficulté.

La difficulté ressort encore davantage lorsque nous travaillons sur l’opposé d’une somme algébrique : En 4eme, on ajoutera que “prendre l’opposé revient à multiplier par (-1)” ; cela donnera plus de sens à la règle de suppression d’un signe " –" devant une parenthèse. En pratique, cela permet aux élèves qui savent utiliser la simple distributivité de trouver une expression développée correcte.

Le calcul littéral est souvent mêlé à des calculs portant sur des nombres relatifs en 4eme. Or, les sommes algébriques n’ont pas toujours le temps d’être assimilées en 5eme (chapitre qui devrait être vu au plus tôt dans l’année pour laisser le temps aux élèves de le maîtriser) et les élèves présentent généralement des carences à ce niveau en début de 4eme. C’est pourtant l’année où ils vont travailler sur multiplier/diviser avec des nombres relatifs.

Le calcul littéral avec des nombres relatifs est alors fragilisé du fait de la confluence de ce chapitre avec celui, problématique, des nombres relatifs. C’est pourquoi il est important de bien consolider le calcul des sommes algébriques sur des expressions numériques d’abord, puis ensuite sur des expressions littérales.

Exemples : calculer $A = -2 + 5 - (-5) - 7$

Puis, plus tard, réduire $B = -7b + 2a - 3a + 5b + 3$.

C’est pourquoi il sera important de réinvestir le calcul numérique avec des nombres relatifs toute l’année de 5e et en début de 4e.

7) Les pièges du calcul algébrique

Certains élèves peuvent être déstabilisés au niveau de l'écriture de certains calculs littéraux qui se présentent pour eux sous une forme inattendue.

Exemple 1 : $2x + 2y = 2(x + y)$
Lors des factorisations, certains élèves trouvent une contradiction entre l'expression développée et celle qui est factorisée. Par exemple, si nous factorisons par 2, ils cherchent le 2 manquant. Il apparaît dans les deux termes de l'expression développée mais n'apparaît plus qu'une seule fois dans l'expression factorisée, ce qui peut déstabiliser certains élèves qui tiennent à une forme d'équilibre au niveau de l'écriture. Ils comptent et s'attendent, visuellement, au même nombre d'apparition du 2 au départ et à l'arrivée.

Exemple 2 : Dans le développement de $(x + y)^2$ le double produit est souvent oublié. Plusieurs raisons sont évoquées par les élèves. Ils pensent qu'en commençant avec deux termes et qu'en finissant avec les deux termes x^2 et ^{2} , tout va bien.
Les élèves peuvent s'attendre aussi à une forme de parallélisme au niveau des écritures comme par exemple, pour l'égalité suivante : $(xy)^2 = x^2 \times y^2$.

On constate aussi une mauvaise appréhension du nombre de termes d'une expression algébrique.
Les élèves ont des difficultés à saisir le nombre de termes d'une expression développée surtout si les signes "×" sont écrits, et ils ont alors tendance à ne pas respecter les priorités opératoires.

Exemple 1: $(a + b)(c + d) = a \times b + a \times d + b \times c + b \times d$ est plus difficile à saisir que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
Il faut alors soulever l'avantage, pour aider à respecter les règles de priorité opératoires, de la convention de l'omission du signe "×" .

Exemple 2 : Dans "$2\ +\ 5y$" écrit ainsi, il transparaît mieux que $2\ +\ 5y$ est une somme, le 5 “s’aimante contre le y”.

8) hétérogénéité du vocabulaire

Il est nécessaire d'harmoniser entre professeurs notre langage et d'expliciter le sens de certains verbes comme « réduire », « développer » qui ont un sens spécifique en mathématiques qui va parfois à l’encontre du sens commun, pour mieux préparer les élèves à la lecture des consignes.
Les types de consignes sont très diverses en calcul littéral et le vocabulaire associé aussi.
Il n’est pas toujours aisé pour un élève de savoir ce qu’il doit faire sans comprendre le vocabulaire très spécifique utilisé : “réduire”, « simplifier l’écriture », «écrire le plus simplement possible», «développer», «factoriser»...
D’un exercice à l’autre, d’un professeur à l’autre, deux consignes apparemment différentes peuvent vouloir dire la même chose.

Exemple 1 : “réduire” ou “simplifier l’écriture” de l’expression $3 \times a + 3 \times w \times 5 \times w$?
Exemple 2 :« développer » $2 \times (\ u + h)$ ou « écrire plus simplement » $2 \times (\ u\ + h)$ ou «écrire sous la forme d’une somme» $2 \times (u + h)$ ou « écrire sans signe × » $2 \times (u + h),$ ou «compléter » $2 \times (u + h) = \ldots$, ou « écrire autrement » $2 \times (u + h)$ (on pourrait alors attendre $2 \times (h + u)$).

Il convient de décider ce que «réduire» veut dire :

- Sens naturel : diminuer quelque chose, le ramener à une dimension moindre (Larousse)

Exemple : $2\,y \times 3\,y\ =\ 6\,y^2$

- ou sens usuel mathématique : réduire une somme.

Exemple : $2x\ + 3x\ =\ 5x$.

Sur internet, nos élèves rencontrent parfois un vocabulaire inexact ou ambigu, il faut les y préparer.

Les élèves doivent aussi pouvoir s'adapter, le sujet de DNB ne sera pas calé sur ce qui aura été décidé au collège de Chevreuse et les exercices proposés en Seconde non plus. Il faut attirer l'attention des élèves sur l'importance du vocabulaire, sur la lecture attentive des consignes, et aussi sur les différentes conventions d'écriture et notations possibles (différentes notations possibles pour l'inverse d'un nombre non nul) pour éviter les confusions et pour aider à la cohérence et à la compréhension générale.

.

III Des pistes pour faire progresser les élèves

1) Maitrise du calcul numérique

Il est important de bien asseoir le calcul numérique, le plus tôt possible, (en 6eme puis avec les nombres relatifs en 5eme), avant de passer à la généralisation que représente le calcul littéral.

Les différents sens du signe " – " et les nombres relatifs qui n'apparaissent qu'en 5eme sont les points qui posent le plus de soucis, comme nous l'avons dit plus haut.

Pour faire travailler les élèves sur le passage d'addition à soustraction et inversement, des exercices de ce type peuvent être utiles :

Exercice *: On pose :* $A = -3 + (-4) - 7 - (+10) - (-2) + 5$
1) Écrire A uniquement à l'aide d'additions.
2) Écrire A uniquement à l'aide de soustractions.
3) Écrire A sans utiliser de parenthèses.

Pour dissiper la confusion entre opposé et inverse, on pourra proposer de faire des exercices tels que celui-ci :

Exercice : *complète le tableau suivant :*

x	Opposé de x	Inverse de x
8		
1,6		
-5		
	10	
		20

2) Illustration concrète

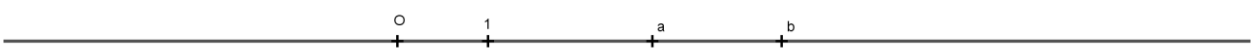
Certains esprits ont besoin de visualiser concrètement les problèmes. Le calcul littéral leur semble souvent trop abstrait.

Pour donner du sens aux additions/soustractions et à la notion d’opposé d’un nombres relatif, des exercices sur droite orientée peuvent aider les élèves :

Exercice *: On a placé les nombres a et b sur une droite orientée.*

A l’aide du compas (ou de la règle graduée),
1) Place : $-a$ *et* $-b$
2) Place : $b+a$
3) Place : $b-a$

Exercice *: On a placé les nombres a et b sur une droite graduée.*



A l’aide du compas (ou de la règle graduée),
1) Place : $-a$ *et* $-b$
2) Place : $a-5$
3) Place : $b+2$

Pour faire une introduction aux propriétés des inégalités, nous pouvons aussi proposer un exercice comme celui-ci :

Exercice *:*

1) Place un nombre a et un nombre b sur la droite tels que $a < b$.
2) A l'aide du compas, place les nombres $a+3$ *et* $b+3$ *puis compare-les.*
3) A l'aide du compas, place les nombres $a-5$ *et* $b-5$ *puis compare-les*
4) A l'aide du compas, place les nombres $-a$ *et* $-b$ *puis compare-les.*

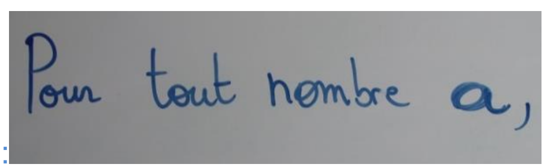
3) Variété des symboles

➢ Dans un premier temps, nous pouvons remplacer éventuellement la lettre par un autre symbole : ❀, ◆, ? , ★ …

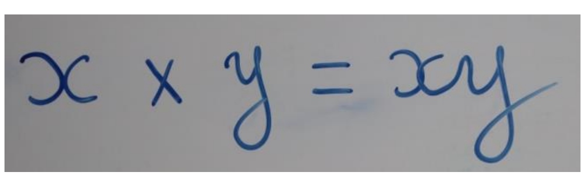
➢ En mathématiques, nous différencions majuscule/minuscule, script/cursive.
Ces distinctions aident à la lecture et à l'identification du type de variable mais il est difficile de faire comprendre à un élève son importance.

➢ On pourra faire remarquer :
– qu'une lettre peut représenter autre chose qu'un nombre (une fonction, un point, un ensemble de points, un ensemble de nombres ...)
– qu'une lettre ne peut représenter deux nombres différents, mais que deux lettres différentes peuvent représenter un même nombre.

➢ La lettre, symbole mathématique, doit être différenciée de la lettre du langage courant quand ils apparaissent dans une même phrase. Par exemple dans les définitions ou les propriétés, les élèves peuvent confondre le "a" du verbe avoir avec le nombre "a"; on peut s'obliger dans le deuxième cas à écrire "le nombre a" ou bien à écrire "a" en gras.



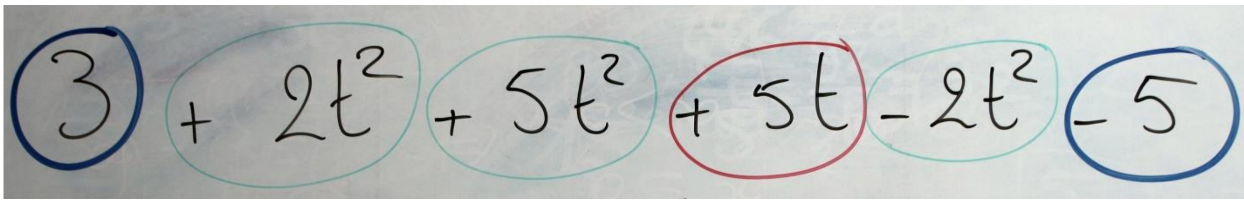
➢Lors de l'omission d'écriture du signe" × ", les lettres étant écrites en cursive, il est facile de lier l'une à l'autre pour faire ressortir les groupements.



➢ Nous pouvons utiliser de la couleur.

Exemple 1 : Dans l'écriture $(x+2)(x-4)$, colorier différemment le $(x+2)$ et le $(x-4)$ en formant des groupements distinguables. Parler ensuite « du facteur vert multiplié par le facteur rouge »..

Exemple 2 : On pourra utiliser des bulles de couleur pour visualiser la structure d'une somme algébrique. On enfermera les termes semblables dans des bulles de même couleur.



4) Occasions précoces de calcul littéral

Il s'agit ici d'introduire délicatement, et subrepticement, les expressions littérales et le calcul littéral dès la sixième en ne manquant aucune des occasions offertes par le programme.

➢ Par exemple, dans les chapitres périmètre/aires/volumes en 6e et en 5e, on peut faire comprendre aux élèves que dans une formule une lettre peut représenter une variable ($\mathcal{P}$ pour périmètre, $\mathcal{V}$ pour volume, r pour rayon etc...). Bien entendu, on soulignera la nécessité de préciser les unités pour chaque formule.

On fera remarquer à cette occasion qu'une lettre peut représenter une variable mais aussi un nombre constant comme π.

Dans tous les cas, on gardera le plus longtemps possible les expressions littérales, jusqu'à la dernière étape qu'on pourrait nommer « application numérique » (et ce dès la 6e), et le mot substitution pourra être utilisé pour la première fois à cette occasion.

On distinguera les différentes étapes : écrire la formule, puis passer à l'application numérique et enfin donner la valeur exacte du résultat, puis éventuellement une valeur approchée avec les unités.

On fera remarquer que π est exprimé à l'aide d'une lettre car son écriture décimale est illimitée et qu'il n'admet pas d'écriture fractionnaire non plus. On distinguera bien à cette occasion le "environ égal à" du signe égal, qui doit garder son caractère propre et exclusif. On refusera le pi=3,14 : *« 3.14 n'est qu'une pâle imitation de π, ce n'est pas π en personne ».*
L'élève doit savoir à tout moment du calcul s'il travaille avec des valeurs exactes ou approchées.

➢ Rédiger des propriétés ou des définitions en utilisant des expressions littérales permet non seulement de généraliser, mais également de se familiariser avec ce type de langage et constitue une bonne introduction à l'utilisation des nombres "cachés" sous des lettres (dès la 6ème).

Exemple 1 : En 6eme, la propriété "Dans une somme, on peut changer l'ordre des termes", pourrait être écrite sous la forme " $x + y = y + x$ pour tous nombres x et y ".

Exemple 2 : A l'occasion d'un exercice mettant en lumière la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, on n'hésitera pas à écrire $x(y+z) = xy + xz$ avec la précision « pour tous nombres x, y et z », ce qui posera aussi les bases de la notion de quantificateurs pour plus tard.

➢ Les exercices de calcul numérique présentés sous forme littérale sont aussi une bonne introduction à la notion de substitution.

***Exercice** : Complète le tableau :*

a	b	$-a$	-$a+b$	$a-b$	$(a-b)^2$
3	-5				
-10	$-2{,}5$				

Exercice *: calcule $A = x - 5$ lorsque $x = 10$ puis lorsque $x = 7$.*

Pour la rédaction de ce dernier exercice, il faudra insister sur la rédaction de la conclusion : "Pour $x = 10,\ A = 5$".

➢ Découvrir une propriété algébrique à l'aide d'un tableau, cela peut permettre à l'élève d'émettre d'abord des conjectures.

Exercice *: complète le tableau puis formule une conjecture.*

a	b	c	$b+c$	$a-(b+c)$	$a-b-c$
2	-3	7			
1,5	8,1	-4			
$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{4}$			

➢ Une autre piste réside dans l'utilisation de programmes de calcul dont le concept est compris par la quasi-totalité des élèves. L'élève est amené à symboliser par une lettre le nombre choisi au départ et à écrire le résultat obtenu en fonction de cette variable. C'est aussi un bon tremplin pour introduire les fonctions en 3eme.

➢ Ces compétences peuvent être consolidées grâce au travail en salle informatique. Les séance d'AP focalisées sur le calcul littéral en utilisant Scratch ou un tableur motivent toujours les élèves.

5) Nécessité et utilisation de la lettre

Pourquoi mettre des lettres si ce sont des nombres ? Autant les élèves le comprennent dans les formules de périmètres, aires et volumes, autant ce point est à introduire de façon délicate dans d'autres contextes.

A l'occasion des exercices qui suivent, on pourra d'ailleurs introduire l'expression «exprimer... en fonction de... » (traduit par « exprimer ...à l'aide de/à partir de ... »)

Exercice d'introduction *du chapitre "calcul littéral" en 5ème proposé au brouillon :* *Paul va à la boulangerie. Il achète un pain au chocolat à 1,10 € et plusieurs baguettes à 0,90€ chacune. Comment peut-on écrire ce qu'il va payer ?*

En dialogue avec la classe, nous passons par des étapes :

$1{,}10 + ? \times 0{,}90$

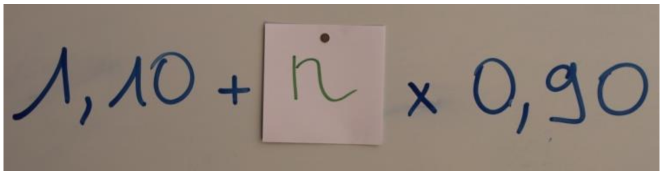
$1{,}10 + \blacklozenge \times 0{,}90$

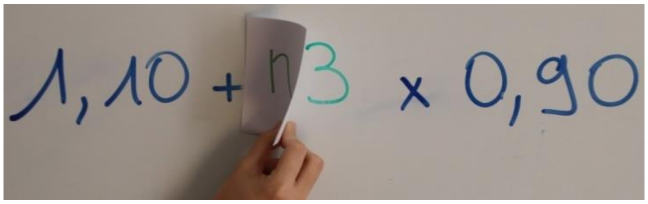
$1{,}10 + nombre\ de\ baguette \times 0{,}90$

Les élèves finissent par proposer d'introduire une lettre qui représentera le nombre de baguettes pour parvenir à une expression du type: $1{,}10 + n \times 0{,}90$. Ils doivent accepter qu'on ne puisse pas aller plus loin tant que le nombre de baguettes n'est pas donné.

Petit à petit, ce type d'exercice sera tourné différemment avec un vocabulaire plus rigoureux mais plus perturbant : *"On appelle n le nombre de baguettes achetées. Exprime le prix à payer en fonction de n.*" ou *"Exprime le prix à payer en fonction du nombre n de baguettes achetées."*

Ils doivent garder à l'esprit que chaque lettre d'une expression littérale est un nombre. Pour cela, dans un premier temps, il est possible de faire des étiquettes avec la lettre "n" au recto et sa valeur modifiable écrite au tableau.



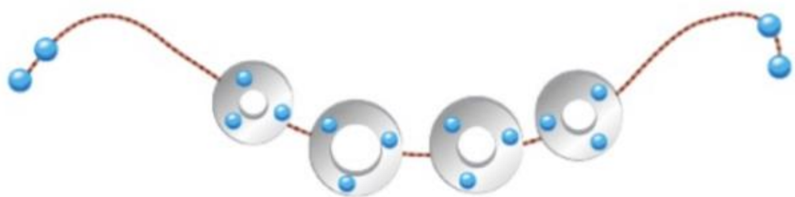


$1{,}10 + 3 \times 0{,}90$

Exercice :

Une créatrice de bijoux réalise des colliers avec des disques en argent et des perles bleues.

Elle fixe 3 perles bleues sur chaque disque et utilise 4 perles pour fermer le collier.



Combien de perles sont nécessaires à la fabrication d'un collier contenant

a) 4 disques ?

b) 1 disque ?

c) 2 disques ?

d) 3 disques ?

e) 7 disques ?

f) 50 disques ?

g) n disques ?

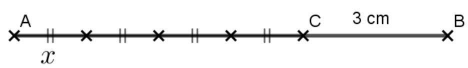
D'autres exercices qui nous paraissent pertinents pour entraîner les élèves à exprimer une quantité en fonction d’une autre sont les suivants :

Exercice :

1) Soit un segment [AB]. On place le point C appartenant à [AB] tel que: BC = 4 cm. On appelle x la longueur de [AC] en cm.

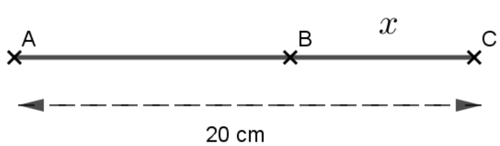
Exprime AB en fonction de x.

2) Soit un segment [AB]. On place le point C appartenant à [AB] tel que: BC = 3 cm. On partage [AC] en 4 segments de même longueur et on appelle x cette longueur en cm.



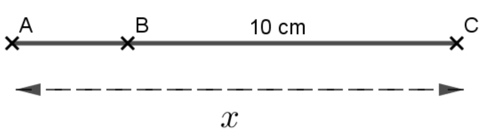
Exprime AB en fonction de x.

3) Soit un segment [AC] de 20 cm. On place un point B appartenant à [AC] et on appelle x la longueur de [BC] en cm.



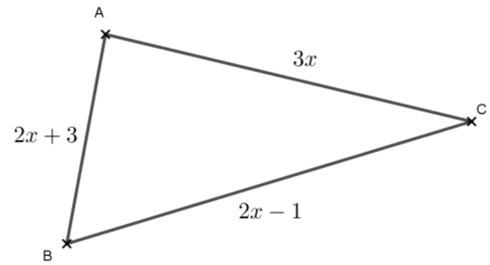
Exprimer AB en fonction de x.

4) Soit un segment [AC] de plus de 10 cm. On place un point B appartenant à [AC] tel que : BC = 10 cm et on appelle x la longueur de [AC] en cm.



Exprimer AB en fonction de x

Exercice : Sachant que $AB = 2x + 3$, que $AC = 3x$ et que $BC = 2x - 1$, exprime le périmètre du triangle ABC en fonction de x.



Exercice :

Luc a 3 ans de plus que Léa, la mère a deux fois l'âge de Léa.

Exprime l'âge de la mère puis celui de Léa en fonction de l'âge de Luc.

6) Traduction du langage courant en langage mathématique

➢ On doit bien insister sur le vocabulaire en tenant compte des confusions courantes.

- Inverse et opposé
- Le double de x et le carré de x
- Le tiers de x, le triple de x et le cube de x
- La moitié de x et double de x
- Le carré de la somme de x et de y et la somme des carrés de x et de y

➢ Une expression littérale obscure peut être traduite en langage courant pour être mieux comprise.

Dans une proposition mathématique, la phrase écrite en langage courant peut venir au secours de celle écrite en langage mathématique, qui fait souvent intervenir une expression littérale obscure pour certains élèves : $a - b = a + (-b)$.

Mais inversement la phrase «soustraire un nombre c'est ajouter l'opposé de ce nombre » présente une structure difficile, voire incompréhensible pour un élève de 5eme qui lit « soustraire à un nombre » et non pas « soustraire un nombre » par exemple (il confond alors COD et COI).

Il nous semble important de passer régulièrement d'un langage à l'autre pour une meilleure compréhension des deux langages par l'élève.

7) Pistes pour la distributivité de la multiplication sur l'addition.

➢ Avant de parler de factorisation, nous pouvons faire comprendre le sens de la simple distributivité et de la réduction dès la classe de 6e.

Exemple 1 : on peut faire remarquer que $10+7+10+7+10+7+10+7$ est égal à $4\ \times 10\ +\ 4\ \times 7$ mais aussi à $4\ \times 17$.

Exemple 2 : On peut rappeler à chaque ligne d'une multiplication posée la quantité qu'elle représente.

$$\begin{array}{rcl} 123 & & \\ \times 72 & & \\ \hline 246 & \longleftarrow & 2\times 123 \\ +\ 8610 & \longleftarrow & 70\times 123 \\ \hline 8856 & \longleftarrow & 2\times 123+70\times 123=72\times 123 \end{array}$$

Donc : $72\times 123 = 8\ 856$

Le retour à la définition de la multiplication par un entier peut nous permettre de finir de convaincre les élèves que : $70\ \times 123+2\times\ 123\ =\ 72\ \times 123$.

$$72\ \times\ 123\ =\underbrace{123+123+123\ +\ \ldots+123}_{\text{72 termes}}$$

Nous pouvons ensuite élargir l'utilisation de l'égalité dans des exercices de ce type :

Exercice *: Calcule astucieusement :*

a) $8 \times 15{,}65 + 2 \times 15{,}65$

b) 9×35

c) 11×45

Ces cas de calculs mentaux seront repris en 5eme pour continuer à donner du sens à la simple distributivité.

Exercice *:*

On achète des costumes pour les 26 élèves de la classe.

Chaque veste coûte 17 € et chaque pantalon 11 €.

Exprime de deux manières la dépense.

Puis lors de calcul du périmètre d'un rectangle, nous pouvons faire remarquer que nous pouvons le calculer de deux façons différentes : en faisant "$2 \times l + 2 \times L$" ou bien en faisant "$2 \times (l + L)$". Ce qui entraine : $2 \times l + 2 \times L = 2 \times (l + L)$. Nous avons la première apparition de l'égalité de simple distributivité avec des variables.

De même avec : $c + c + c + c = 4c$.

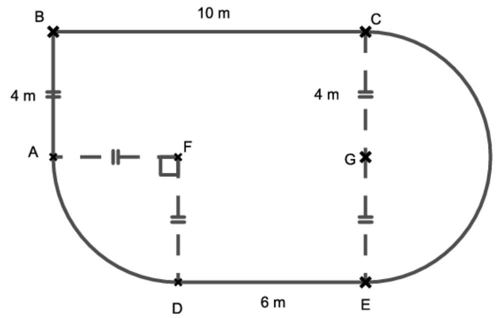
Et pour aller encore plus loin, lors des calculs de grandeurs avec le cercle / disque. Nous pouvons présenter une première approche d'un calcul littéral :

$$2\pi + 4\pi = 6\pi.$$

Exercice *utilisant une réduction avec des lettres en 6^e^ (difficile) :*

Marjorie a une belle terrasse.
Un schéma de celle-ci a été réalisée ci-contre :
Le quart de cercle $\overset{\frown}{AD}$ a pour centre F.
Le demi-cercle $\overset{\frown}{CE}$ a pour centre G.

Calcule le périmètre de la terrasse de Marjorie.



Solution :

$\mathscr{P} = AB + BC + \overset{\frown}{CE} + ED + \overset{\frown}{DA}$

$\mathscr{P} = AB + BC + \pi \times d \div 2 + ED + \pi \times d \div 4$

$\mathscr{P} = 4 + 10 + \pi \times 8 \div 2 + 6 + \pi \times 8 \div 4$

$\mathscr{P} = 20 + \pi \times 4 + \pi \times 2$

$\mathscr{P} = 20 + 6 \times \pi \quad (valeur\ exacte)$

$\mathscr{P} \approx 20 + 6 \times 3,14$

$\mathscr{P} \approx 20 + 18,84$

$\mathscr{P} \approx 38,84 \quad (valeur\ approchée)$

La terrasse de Marjorie a un périmètre d'environ 38,84 m.

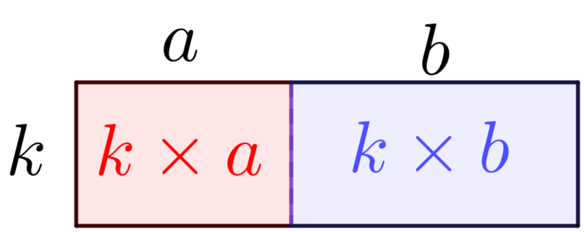
Remarque : Pour faciliter les notations, nous avons pris la liberté de confondre la notation de la longueur d'un arc avec la notation de l'arc.

Réductions

Ensuite, en 4^{eme}, nous pouvons introduire la simple distributivité dans toute sa généralité :

Pour tous nombres $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$: $\quad k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

L'illustration géométrique dans le cas où k, a et b sont positifs, à l'aide du calcul de l'aire d'un rectangle de côtés $a + b$ et k, permet de rendre plus concrète cette égalité, en plus du travail fait en 6^{eme} et 5^{eme}.



Cette propriété, utilisée dans le sens factorisation, permet de démontrer les réductions faites précédemment. Une question se pose : que dire aux élèves lorsqu'on réduit ?

Nous pouvons laisser les élèves réduire de façon intuitive. Par exemple, pour “$3y + 5y$”, nous avons 3 “i grecs” auxquels nous ajoutons 5 “i grecs”, nous avons donc 8 “i grecs”.

Cela sera plus compliqué avec des réductions du type "3 € - 5 € = -2 €" qu'avec “$3y - 5y = -2y$” ou "$3x^2 - 5x^2 = -2x^2$" .

Et réduire “$1{,}5x - 2{,}75x$” sera plus problématique ainsi. Nous pouvons rappeler à chaque réduction qu'elle se justifie par factorisation pour apporter de la rigueur sans nécessairement l'écrire dans les cas simples. Ainsi, il est plus aisé de réduire l'exemple précédent :

$$1{,}5x - 2{,}75x = (1{,}5 - 2{,}75)x = -1{,}25x$$

Factorisation

Que le facteur commun soit apparent ou pas, la factorisation pose des problèmes.

On pourra laisser à l'élève le choix de l'expression à factoriser ainsi que celui du nom des variables. Demander à l'élève de créer lui-même, pour son voisin de table, un exercice de factorisation, lui permet de se libérer de la contrainte « je cherche un facteur commun » puisque c'est lui qui l'a créé. Il pense aussi être libéré de la contrainte de factoriser, en déléguant cette tâche à un camarade ; il adopte ainsi un point de vue d'observateur, qui rend son regard plus critique et sa vigilance plus alerte (et pour la classe aussi).

Exercice :
1) Trouve une expression qui peut être factorisée par 4.
2) Trouve une expression qui peut être factorisée par x.
3) Trouve une expression qui peut être factorisée par $5y$.
4) Trouve une expression qui peut être factorisée par $-2x^2$.
5) Trouve une expression qui peut être factorisée.

On ne doit pas hésiter à faire des factorisations avec 2, 3 ou 4 …termes.

On peut encore utiliser les couleurs pour faire apparaître le facteur commun et il ne faut pas hésiter à prononcer le mot de « facteur commun k ». On peut aussi dire « je mets k en facteur » et « je factorise par k ».

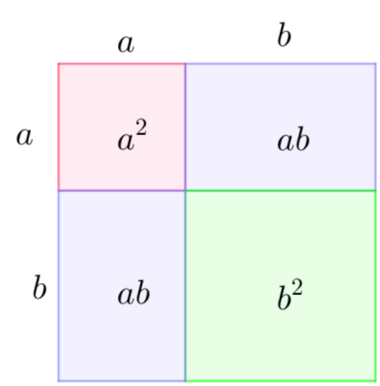
On peut aussi dire à l'élève de toujours vérifier sa factorisation en la développant et lui laisser la possibilité de rectifier sa factorisation à tâtons et que l'important c'est de vérifier et de corriger.

Identités remarquables

Nous avons fait remarquer plus haut qu'il était fréquent que les élèves oublient le double produit en développant les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$.

On pourra :

- évoquer l'identité $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ au moment d'évoquer $(xy)^2 = x^2 \times y^2$ et attirer l'attention sur les pièges inhérents à l'écriture et sur les deux « situations différentes »
- Faire écrire $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ mais aussi $(x+y)^2$ différent de $x^2 + y^2$ en général. Donner plusieurs contre-exemples qui infirment $(x+y)^2 = x^2 + y^2$: égalité vraie pour… /égalité fausse pour …, recherche avec les élèves, $1^2 + 1^2$ différent de $(1+1)^2$ et qui permettent de marquer les esprits et de déjouer certains “pièges d'écriture”.
- Nommer le « double produit » peut aider à identifier la difficulté
- Ajouter une illustration géométrique



8) Démonstrations en algèbre

En cours ou en exercice, les démonstrations sont l'occasion de pratiquer du calcul littéral et de prouver son efficacité.

Exemples en exercices :

- Résolutions de problèmes : mise en équations, résolutions d'équations, exercices complexes à résoudre avec des schémas (voir celui précédemment cité quand il faut retrouver l'âge de Léa et de sa mère connaissant celui de Luc) …
- Propriétés en arithmétique : démontrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7…
- Eventuellement, démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, si l'occasion se présente.

Exemples en cours :

- Démontrer la double distributivité à l'aide la simple distributivité en posant $k = a + b$.
- Démontrer les identités remarquables à l'aide de la double distributivité.
- En 5^{eme}, nous pouvons démontrer $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ à partir de la définition d'un quotient.

On pourra faire réaliser aux élèves une fiche : "comment démontrer une égalité en mathématiques" :

Pour montrer que A=B, je peux :
-Partir de A, calculer ....et arriver à B
-Partir de B, calculer ....et arriver à A
-montrer que $A = C$ et $B = C$
-montrer que $A - B = 0$
-Montrer, si B différent de 0, que: $A/B = 1$

9) Notion de quantificateurs

En 5eme, on apprend à « tester une égalité » ; on parle d’égalité “vraie” ou “fausse” pour une valeur particulière de la variable. Il faut veiller faire écrire en conclusion « l'égalité est vraie/fausse pour x $=$ ... »

Dans l'étude de la résolution d'équation, on sera amené à rencontrer 3 cas possibles :
- il existe un nombre (ou plusieurs) pour lequel l'égalité est vraie ; c'est la (les) solution(s) de cette équation.
- cette égalité est vraie pour toute valeur de l'inconnue.
- cette égalité n'est vraie pour aucune valeur de l'inconnue.

On résoudra des équations n’ayant aucune solution ou ayant pour solution tout nombre.

De même, on rencontrera des égalités à plusieurs variables qui seront vraies pour toutes valeurs des variables, telles que les identités.

En cours, il faut veiller à bien rédiger les définitions/propriétés en précisant l'ensemble dans lequel l'égalité est vraie.
Exemple : “Pour tout nombre positif, ...”

10) Automatisme en calcul littéral, travail de répétition

Un moyen de créer des automatismes et permettre aux élèves d’être de plus en plus efficaces est de leur faire faire des batteries d’exercices de difficulté croissante de manière très progressive. On insistera sur les cas simples au départ. On pourra aussi demander aux élèves de venir au tableau pour concevoir des questions pour leurs camarades.

La progressivité doit être divulguée à l'élève avec le niveau indiqué (par exemple : 1 étoile, 2 étoiles,...). Ces exercices peuvent être interprétés comme des « gammes » accompagnés de petits défis, et l’élève peut mesurer ses progrès et sa dextérité. On pourra mêler progressivement des difficultés dues aux nombres négatifs et/ou aux écritures fractionnaires...

Pour éviter d’y consacrer trop de temps pendant les heures de cours, les exercices peuvent être faits à la maison.

Il faut cependant veiller à bien doser la quantité et la difficulté en fonction du niveau des élèves. Cela signifie donc qu’il faut faire des fiches d’exercices personnalisées, en AP par exemple. Ce serait l’idéal, mais cela ne nous paraît pas vraiment réalisable avec des classes à 30 élèves.

Les élèves plus motivés peuvent utiliser, en autonomie à la maison, les exerciseurs qu’on trouve sur internet, comme Euler-Wims par exemple. Le professeur peut indiquer le niveau de chaque fiche d’exercices pour aider les élèves à s’autoévaluer. Un retour est possible pour le professeur mais il est difficile d’obliger tous les élèves à y aller. Il est aussi possible de les utiliser d’abord en séances d’AP en salle informatique pour les convaincre de leur efficacité.

En plus de la répétition, nous pensons qu’il est primordial que les élèves fassent du calcul littéral régulièrement tout au long de l’année, au hasard d’exercices, en activité mentale, en devoir maison, en contrôle....

IV Conclusion

Les échanges que nous avons eus sur le sujet du calcul littéral nous ont permis de mutualiser nos constats, nos pratiques et de faire naître de nouvelles idées. Chacune de nous a ensuite utilisé le fruit de nos discussions comme bon lui semblait. Cela a enrichi notre façon de traiter cette difficile notion de calcul littéral et cela a permis de travailler de concert sur de nouvelles pistes. Nous continuerons ce travail qui est amené à évoluer en fonction des difficultés des élèves et des exigences des programmes.

L'équipe de mathématiques du collège Pierre de Coubertin de Chevreuse.
Mmes Borissov, Khazal, Laptenok, Martini, Troadec et Vigo